反射テスト　整数　不定方程式　01

1.　次の問いに答えよ．（ S 級 4 分，A 級 6 分，B 級 9 分，C 級 14 分 ）

(1)　$12m+16n=0$ を満たす整数 m，n を求めよ．

(2)　$2m+3n=25$ を満たす整数 m，n を求めよ．

(3)　$9m+16n=98$ を満たす整数 m，n を求めよ．

(4)　$13m-7n=1$ を満たす自然数 m，n を求めよ．

2. 次の問いに答えよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1) $25m - 20n = 0$ を満たす整数 m, n を求めよ.

(2) $3m + 5n = 28$ を満たす整数 m, n を求めよ.

(3) $10m + 14n = 120$ を満たす整数 m, n を求めよ.

(4) $17m - 9n = 1$ を満たす自然数 m, n を求めよ.

反射テスト　整数　不定方程式　01　解答解説

1.　次の問いに答えよ.（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 14 分 ）

★ 不定方程式 $am + bn = c$ の解き方

①　解 (m, n) を 1 つ見つける.　　← ☆特定解・特殊解という

②　他の整数 k を用いて, m や n を表す.　　← ☆一般解という

解の表し方は幾通りもあるので, 答え合わせのときに注意が必要である.

(1)　$12m + 16n = 0$　…　①
を満たす整数 m, n を求めよ.

両辺 ÷ 4 より,

$3m + 4n = 0$

$3m = -4n$

m, n は整数であるから,
$3m$ は 3 の倍数, $-4n$ は 4 の倍数である.
$3m = -4n$ であるから, これらは 12 の倍数といえる.

$3m = -4n = 12k$　（ k は整数 ）

とおけるので,

$3m = 12k$　⇔　$m = 4k$

$-4n = 12k$　⇔　$n = -3k$

$\boldsymbol{m = 4k}$ **,** $\boldsymbol{n = -3k}$ **(** $\boldsymbol{k}$ **は整数)**

（ $m = 4k + 4$, $n = -3k - 3$ なども正解である ）

(2)　$2m + 3n = 25$　…　①
を満たす整数 m, n を求めよ.

m について解くと,

$m = \dfrac{25 - 3n}{2}$

$(m, n) = (11, 1)$ が解の一つ.

元の式に $m = 11$, $n = 1$ を代入して,

$2 \cdot 11 + 3 \cdot 1 = 25$　…　②

① − ② より,

$2(m - 11) + 3(n - 1) = 0$

$2(m - 11) = -3(n - 1) = 6k$　（ k は整数 ）

とおけるので,

$2(m - 11) = 6k$　⇔　$m = 3k + 11$

$-3(n - 1) = 6k$　⇔　$n = -2k + 1$

$\boldsymbol{m = 3k + 11}$ **,** $\boldsymbol{n = -2k + 1}$ **(** $\boldsymbol{k}$ **は整数)**

（ $m = 3k + 8$, $n = -2k + 3$ なども正解である ）

(3)　$9m + 16n = 98$　…　①
を満たす整数 m, n を求めよ.

m について解くと,

$m = \dfrac{98 - 16n}{9}$

$(m, n) = (2, 5)$ が解の一つ.

元の式に $m = 2$, $n = 5$ を代入して,

$9 \cdot 2 + 16 \cdot 5 = 98$　…　②

① − ② より,

$9(m - 2) + 16(n - 5) = 0$

$9(m - 2) = -16(n - 5) = 144k$　（ k は整数 ）

とおけるので,

$9(m - 2) = 144k$　⇔　$m = 16k + 2$

$-16(n - 5) = 144k$　⇔　$n = -9k + 5$

$\boldsymbol{m = 16k + 2}$ **,** $\boldsymbol{n = -9k + 5}$ **(** $\boldsymbol{k}$ **は整数)**

(4)　$13m - 7n = 1$　…　①
を満たす自然数 m, n を求めよ.

$(m, n) = (6, 11)$ が解の一つ.

元の式に $m = 6$, $n = 11$ を代入して,

$13 \cdot 6 - 7 \cdot 11 = 1$　…　②

① − ② より,

$13(m - 6) - 7(n - 11) = 0$

$13(m - 6) = 7(n - 11) = 91k$　（ k は整数 ）

とおけるので,

$13(m - 6) = 91k$　⇔　$m = 7k + 6$

$7(n - 11) = 91k$　⇔　$n = 13k + 11$

m, n は自然数であるから,

$m = 7k + 6 \geqq 1$　⇒　$k \geqq -\dfrac{5}{7}$

$n = 13k + 11 \geqq 1$　⇒　$k \geqq -\dfrac{10}{13}$

ゆえに, $k \geqq 0$ で, 整数であれば,
m, n は自然数になる.

$\boldsymbol{m = 7k + 6}$ **,** $\boldsymbol{n = 13k + 11}$ **(** $\boldsymbol{k}$ **は 0 以上の整数)**

2. 次の問いに答えよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1) $25m-20n=0 \quad \cdots \quad ①$
を満たす整数 m, n を求めよ.

両辺 $\div 5$ より,
$5m-4n=0$
$5m=4n$
m, n は整数であるから,
$5m$ は 5 の倍数, $4n$ は 4 の倍数である.
$5m=4n$ であるから, これらは 20 の倍数といえる.
$5m=4n=20k \quad$ （ k は整数 ）
とおけるので,
$5m=20k \quad \Leftrightarrow \quad m=4k$
$4n=20k \quad \Leftrightarrow \quad n=5k$

$\boldsymbol{m=4k}$ **,** $\boldsymbol{n=5k}$ **(** $\boldsymbol{k}$ **は整数)**

(2) $3m+5n=28 \quad \cdots \quad ①$
を満たす整数 m, n を求めよ.

m について解くと,
$m=\dfrac{28-5n}{3}$
$(m,n)=(6,2)$ が解の一つ.
元の式に $m=6$, $n=2$ を代入して,
$3 \cdot 6+5 \cdot 2=28 \quad \cdots \quad ②$
① − ② より,
$3(m-6)+5(n-2)=0$
$3(m-6)=-5(n-2)=15k \quad$ （ k は整数 ）
とおけるので,
$3(m-6)=15k \quad \Leftrightarrow \quad m=5k+6$
$-5(n-2)=15k \quad \Leftrightarrow \quad n=-3k+2$

$\boldsymbol{m=5k+6}$ **,** $\boldsymbol{n=-3k+2}$ **(** $\boldsymbol{k}$ **は整数)**

(3) $10m+14n=120 \quad \cdots \quad ①$
を満たす整数 m, n を求めよ.

両辺 $\div 2$ をして,
$5m+7n=60 \quad \cdots \quad ②$
$(m,n)=(5,5)$ が解の一つ.
②の式に $m=5$, $n=5$ を代入して,
$5 \cdot 5+7 \cdot 5=60 \quad \cdots \quad ③$
② − ③ より,
$5(m-5)+7(n-5)=0$
$5(m-5)=-7(n-5)=35k \quad$ （ k は整数 ）
とおけるので,
$5(m-5)=35k \quad \Leftrightarrow \quad m=7k+5$
$-7(n-5)=35k \quad \Leftrightarrow \quad n=-5k+5$

$\boldsymbol{m=7k+5}$ **,** $\boldsymbol{n=-5k+5}$ **(** $\boldsymbol{k}$ **は整数)**

(4) $17m-9n=1 \quad \cdots \quad ①$
を満たす自然数 m, n を求めよ.

$(m,n)=(8,15)$ が解の一つ.
元の式に $m=8$, $n=15$ を代入して,
$17 \cdot 8-9 \cdot 15=1 \quad \cdots \quad ②$
① − ② より,
$17(m-8)-9(n-15)=0$
$17(m-8)=9(n-15)=153k \quad$ （ k は整数 ）
とおけるので,
$17(m-8)=153k \quad \Leftrightarrow \quad m=9k+8$
$9(n-15)=153k \quad \Leftrightarrow \quad n=17k+15$

m, n は自然数であるから,
$m=9k+8 \geqq 1 \quad \Rightarrow \quad k \geqq -\dfrac{7}{9}$
$n=17k+15 \geqq 1 \quad \Rightarrow \quad k \geqq -\dfrac{14}{17}$
ゆえに, $k \geqq 0$ で, 整数であれば,
m, n は自然数になる.

$\boldsymbol{m=9k+8}$ **,** $\boldsymbol{n=17k+15}$ **(** $\boldsymbol{k}$ **は 0 以上の整数)**