反射テスト　解析　空間座標　面と面との交線　01

1.　xyz 空間座標において，次の図形の交線の方程式を求めよ.（ S 級 1 分 30 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

(1)　$\begin{cases} \text{平面の方程式}\quad x - y - z - 1 = 0 \\ \text{平面の方程式}\quad 5x + y - 2z - 5 = 0 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} \text{平面の方程式}\quad x = 3 \\ \text{球面の方程式}\quad x^2 + y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$

2.　xyz 空間座標において, 次の図形の交線の方程式を求めよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1)　$\begin{cases} \text{平面の方程式} \quad x+y-z+1=0 \\ \text{平面の方程式} \quad 4x+y-2z+4=0 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} \text{平面の方程式} \quad z=1 \\ \text{球面の方程式} \quad x^2+y^2+z^2=4 \end{cases}$

反射テスト　解析　空間座標　面と面との交線　01　解答解説

1.　xyz 空間座標において，次の図形の交線の方程式を求めよ．(S 級 1 分 30 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分)

★ 直線と平面との交点の座標　直線の方程式と平面の方程式の **連立解**
★ 直線と球面との交点の座標　直線の方程式と球面の方程式の **連立解**
面と面が交わる部分の図形は線である．これを交線という．
★球をある平面で切断すると，切り口は **円**

(1)
$$\begin{cases} \text{平面の方程式} \quad x-y-z-1=0 & \cdots① \\ \text{平面の方程式} \quad 5x+y-2z-5=0 & \cdots② \end{cases}$$

★平面と平面との交線　平面の方程式と平面の方程式の **連立解**　$\Rightarrow$　x, y, z のいずれかを消去

$$\begin{array}{rrrrrrr} & ① & x & -y & -z & -1 & = & 0 \\ +) & ② & 5x & +y & -2z & -5 & = & 0 \\ \hline & & 6x & & -3z & -6 & = & 0 \end{array}$$

$\Leftrightarrow$　$2x-z-2=0$　$\Leftrightarrow$　$z=2(x-1)$

ここで，　$x-1=t$ とおくと，(★媒介変数表示) $\begin{cases} x=t+1 & \Leftrightarrow & x-1=t & \cdots③ \\ z=2t & \Leftrightarrow & \frac{z}{2}=t & \cdots④ \end{cases}$

①　$\Rightarrow$　$t+1-y-2t-1=0$　$\Leftrightarrow$　$y=-t$　$\Leftrightarrow$　$t=-y$　$\cdots⑤$

③,④,⑤ より　$t=x-1=-y=\dfrac{z}{2}$

$\therefore$交線の方程式は　$\boldsymbol{x-1=-y=\dfrac{z}{2}}$　**…答え**

(これは，点 $(1,0,0)$ を通り，方向ベクトル $(1,-1,2)$ の直線の方程式である．)

(2)
$$\begin{cases} \text{平面の方程式} \quad x=3 & \cdots① \\ \text{球面の方程式} \quad x^2+y^2+z^2=25 & \cdots② \end{cases}$$

★球をある平面で切断すると，切り口は **円**
★平面と球面との交線　平面の方程式と球面の方程式の **連立解**　$\Rightarrow$　x, y, z のいずれかを消去
①を②に代入して　$3^2+y^2+z^2=25$　$\Leftrightarrow$　$y^2+z^2=16$　$\Leftrightarrow$　$y^2+z^2=4^2$

$\therefore$　交線の方程式 $\boldsymbol{y^2+z^2=4^2}$ **かつ** $\boldsymbol{x=3}$　**…答え**

(これは，平面 $x=3$ 上で，中心 $(3,0,0)$，半径 4 の円である．)

2. xyz 空間座標において，次の図形の交線の方程式を求めよ．(S 級 1 分 30 秒，A 級 3 分，B 級 5 分，C 級 7 分)

(1) $\begin{cases} \text{平面の方程式} \quad x+y-z+1=0 & \cdots① \\ \text{平面の方程式} \quad 4x+y-2z+4=0 & \cdots② \end{cases}$

★平面と平面との交線　平面の方程式と平面の方程式の **連立解** $\Rightarrow$ x, y, z のいずれかを消去

$$\begin{array}{rrrrrrr} & ① & x & +y & -z & +1 & = & 0 \\ -) & ② & 4x & +y & -2z & +4 & = & 0 \\ \hline & & -3x & & +z & -3 & = & 0 \end{array}$$

$\Leftrightarrow \quad 3x-z-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad z=3(x+1)$

ここで，　$x+1=t$ とおくと，(★媒介変数表示) $\begin{cases} x=t-1 & \Leftrightarrow & x+1=t & \cdots③ \\ z=3t & \Leftrightarrow & \frac{z}{3}=t & \cdots④ \end{cases}$

① $\Rightarrow$ $t-1+y-3t+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=2t \quad \Leftrightarrow \quad t=\frac{y}{2} \quad \cdots⑤$

③, ④, ⑤ より　$t=x+1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$

∴交線の方程式は　$\boldsymbol{x+1=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}}$　**…答え**

(これは，点 $(-1, 0, 0)$ を通り，方向ベクトル $(1, 2, 3)$ の直線の方程式である．)

(2) $\begin{cases} \text{平面の方程式} \quad z=1 & \cdots① \\ \text{球面の方程式} \quad x^2+y^2+z^2=4 & \cdots② \end{cases}$

★球をある平面で切断すると，切り口は **円**

★平面と球面との交線　平面の方程式と球面の方程式の **連立解** $\Rightarrow$ x, y, z のいずれかを消去

①を②に代入して　$x^2+y^2+1^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2=3 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+y^2=\sqrt{3}^2$

∴　交線の方程式 $\boldsymbol{x^2+y^2=\sqrt{3}^2}$ **かつ** $\boldsymbol{z=1}$　**…答え**

(これは，平面 $z=1$ 上で，中心 $(0, 0, 1)$，半径$\sqrt{3}$の円である．)