反射テスト　解析　空間座標　直線と面との交点　01

1.　xyz 空間座標において，次の図形の交点の座標を求めよ．(S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 20 秒，B 級 3 分 30 秒，C 級 5 分)

(1)
$$\begin{cases} \text{直線の方程式} \quad x+2=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{-2} \\ \text{平面の方程式} \quad 2x+3y+z-5=0 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} \text{直線の方程式} \quad x+2=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1} \\ \text{球面の方程式} \quad x^2+y^2+z^2=17 \end{cases}$$

2. xyz 空間座標において，次の図形の交点の座標を求めよ．(S 級 2 分，A 級 3 分，B 級 4 分 30 秒，C 級 6 分 30 秒)

(1) $\begin{cases} \text{直線の方程式} \quad \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+2}{-1} \\ \text{平面の方程式} \quad 3x + 4y - 2z + 16 = 0 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \text{直線の方程式} \quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = z + 2 \\ \text{球面の方程式} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 11 \end{cases}$

反射テスト　解析　空間座標　直線と面との交点　01　解答解説

1.　xyz 空間座標において，次の図形の交点の座標を求めよ．（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 20 秒，B 級 3 分 30 秒，C 級 5 分 ）

★ 直線と平面との交点の座標　直線の方程式と平面の方程式の **連立解**
★ 直線と球面との交点の座標　直線の方程式と球面の方程式の **連立解**

(1) $\begin{cases} \text{直線の方程式} \quad x+2=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{-2} \\ \text{平面の方程式} \quad 2x+3y+z-5=0 \end{cases}$

★直線⇒媒介変数表示
媒介変数で表した方が計算しやすい．
直線の方程式　$x+2=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z+3}{-2}=t$　とおくと，（ ただし t は実数 ）

$$x+2=t \iff x=t-2$$
$$\frac{y-1}{3}=t \iff y=3t+1$$
$$\frac{z+3}{-2}=t \iff z=-2t-3$$

これを平面の方程式に代入して，

$$2(t-2)+3(3t+1)+(-2t-3)-5=0 \iff 2t-4+9t+3-2t-3-5=0 \iff t=1$$

$t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=t-2=1-2=-1 \\ y=3t+1=3+1=4 \\ z=-2t-3=-2-3=-5 \end{cases}$　　$\therefore$　交点 $\boldsymbol{(-1,4,-5)}$　**…答え**

(2) $\begin{cases} \text{直線の方程式} \quad x+2=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1} \\ \text{球面の方程式} \quad x^2+y^2+z^2=17 \end{cases}$

★直線⇒媒介変数表示
媒介変数で表した方が計算しやすい．
直線の方程式　$x+2=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}=t$　とおくと，（ ただし t は実数 ）

$$x+2=t \iff x=t-2$$
$$\frac{y}{2}=t \iff y=2t$$
$$\frac{z-1}{-1}=t \iff z=-t+1$$

これを球面の方程式に代入して，

$$(t-2)^2+(2t)^2+(-t+1)^2=17 \iff t^2-4t+4+4t^2+t^2-2t+1=17 \iff 6t^2-6t-12=0$$
$$\iff t^2-t-2=0 \iff (t+1)(t-2)=0 \iff t=-1,2$$

$t=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=t-2=-1-2=-3 \\ y=2t=-2 \\ z=-t+1=-(-1)+1=2 \end{cases}$　　$t=2 \Rightarrow \begin{cases} x=t-2=2-2=0 \\ y=2t=2\cdot 2=4 \\ z=-t+1=-2+1=-1 \end{cases}$

$\therefore$　交点 $\boldsymbol{(-3,-2,2)}$ と $\boldsymbol{(0,4,-1)}$　**…答え**

2. xyz 空間座標において，次の図形の交点の座標を求めよ．（ S 級 2 分，A 級 3 分，B 級 4 分 30 秒，C 級 6 分 30 秒 ）

(1) $\begin{cases} \text{直線の方程式} & \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+2}{-1} \\ \text{平面の方程式} & 3x + 4y - 2z + 16 = 0 \end{cases}$

★直線⇒媒介変数表示
媒介変数で表した方が計算しやすい．
直線の方程式 $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z+2}{-1} = t$ とおくと，（ ただし t は実数 ）

$\dfrac{x}{2} = t \iff x = 2t$

$\dfrac{y-5}{3} = t \iff y = 3t + 5$

$\dfrac{z+2}{-1} = t \iff z = -t - 2$

これを平面の方程式に代入して，

$3(2t) + 4(3t+5) - 2(-t-2) + 16 = 0 \iff 6t + 12t + 20 + 2t + 4 + 16 = 0 \iff t = -2$

$t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2t = -4 \\ y = 3t + 5 = -6 + 5 = -1 \\ z = -t - 2 = 2 - 2 = 0 \end{cases}$ $\therefore$ 交点 $\boldsymbol{(-4, -1, 0)}$ **…答え**

(2) $\begin{cases} \text{直線の方程式} & \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = z + 2 \\ \text{球面の方程式} & x^2 + y^2 + z^2 = 11 \end{cases}$

★直線⇒媒介変数表示
媒介変数で表した方が計算しやすい．
直線の方程式 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = z + 2 = t$ とおくと，（ ただし t は実数 ）

$\dfrac{x-1}{2} = t \iff x = 2t + 1$

$\dfrac{y+2}{-3} = t \iff y = -3t - 2$

$z + 2 = t \iff z = t - 2$

これを球面の方程式に代入して，

$(2t+1)^2 + (-3t-2)^2 + (t-2)^2 = 11 \iff 4t^2 + 4t + 1 + 9t^2 + 12t + 4 + t^2 - 4t + 4 = 11 \iff 14t^2 + 12t - 2 = 0$
$\iff 7t^2 + 6t - 1 = 0 \iff (t+1)(7t-1) = 0 \iff t = -1, \dfrac{1}{7}$

$t = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 = -2 + 1 = -1 \\ y = -3t - 2 = 3 - 2 = 1 \\ z = t - 2 = -1 - 2 = -3 \end{cases}$ $t = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 = \dfrac{2}{7} + 1 = \dfrac{9}{7} \\ y = -3t - 2 = -\dfrac{3}{7} - 2 = -\dfrac{17}{7} \\ z = t - 2 = \dfrac{1}{7} - 2 = -\dfrac{13}{7} \end{cases}$

$\therefore$ 交点 $\boldsymbol{(-1, 1, -3)}$ と $\boldsymbol{\left(\dfrac{9}{7}, -\dfrac{17}{7}, -\dfrac{13}{7}\right)}$ **…答え**