反射テスト　解析　空間座標　平面の方程式　02

1.　xyz 空間座標において，次の条件を満たす平面の方程式を求めよ.（ S 級 1 分 20 秒，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 4 分 30 秒 ）

（1）　xy 平面

（2）　y 軸に垂直で，点 $(1, 2, 4)$ を通る

（3）　直線 $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4}$ に垂直で，点 $(1, 3, -5)$ を通る

（4）　3 点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)$ を通る

2. xyz 空間座標において，次の条件を満たす平面の方程式を求めよ．(S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 20 秒，B 級 3 分 30 秒，C 級 5 分)

(1) zx 平面

(2) x 軸に垂直で，点 $(-1, 0, 2)$ を通る

(3) 直線 $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+1}{-4}$ に垂直で，点 $(0, -2, -7)$ を通る

(4) 3 点 $(1, 0, 0), (0, -2, 0), (0, 0, 3)$ を通る

反射テスト　解析　空間座標　平面の方程式　02　解答解説

1.　xyz 空間座標において，次の条件を満たす平面の方程式を求めよ.（ S 級 1 分 20 秒，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 4 分 30 秒 ）

★ 空間における平面の方程式

点 (p, q, r) を通り，法線ベクトル (a, b, c) である平面の方程式は　$\boldsymbol{a(x-p)+b(y-q)+c(z-r)=0}$

法線ベクトル (a, b, c) のみが与えられた場合は　$\boldsymbol{ax+by+cz+d=0}$　とおくのもよい.

（1）　xy 平面

$\boldsymbol{z=0}$　…答え

☆イメージ

平面座標において，x 軸 ⇔ $y=0$

これを立体座標に拡張する.

（2）　y 軸に垂直で，点 $(1, 2, 4)$ を通る

y 軸に垂直であるから $y=a$ とおける.

$(1, 2, 4)$ を通るから $\boldsymbol{y=2}$　…答え

☆イメージ

平面座標において，x 軸に垂直 ⇔ $x=a$

これを立体座標に拡張する.

（3）　直線 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}$ に垂直で，点 $(1, 3, -5)$ を通る

直線の方向ベクトルは $(2, 3, 4)$

直線に垂直であるから求める平面の法線ベクトルも $(2, 3, 4)$

∴　$\boldsymbol{2(x-1)+3(y-3)+4(z+5)=0}$　…答え

（4）　3 点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)$ を通る

点 $(1, 0, 0)$ を通るから，平面の方程式は

$a(x-1)+by+cz=0$ とおける.

$(0, 1, 0)$ を通る　⇒　$-a+b=0$　⇔　$b=a$

$(0, 0, -1)$ を通る　⇒　$-a-c=0$　⇔　$c=-a$

∴　$a(x-1)+ay-az=0$

$a=0$ のとき平面の方程式にならないので，$a \neq 0$

両辺を a で割って，

$x-1+y-z=0$

⇔　$\boldsymbol{x+y-z-1=0}$　…答え

☆別解

求める平面を $ax+by+cz+d=0$ とおくと，

$(1, 0, 0)$ を通る　⇒　$a+d=0$　⇔　$a=-d$

$(0, 1, 0)$ を通る　⇒　$b+d=0$　⇔　$b=-d$

$(0, 0, -1)$ を通る　⇒　$-c+d=0$　⇔　$c=d$

これを平面の式に代入し，両辺を d で割ればよい.

2. xyz 空間座標において，次の条件を満たす平面の方程式を求めよ.（S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 20 秒，B 級 3 分 30 秒，C 級 5 分）

（1） zx 平面

$\boldsymbol{y=0}$ …答え

☆イメージ
平面座標において，x 軸 $\Leftrightarrow$ $y=0$
これを立体座標に拡張する.

（2） x 軸に垂直で，点 $(-1,0,2)$ を通る

x 軸に垂直であるから $x=a$ とおける.
$(-1,0,2)$ を通るから $\boldsymbol{x=-1}$ …答え

☆イメージ
平面座標において，x 軸に垂直 $\Leftrightarrow$ $x=a$
これを立体座標に拡張する.

（3） 直線 $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-4}$ に垂直で，
点 $(0,-2,-7)$ を通る

直線の方向ベクトルは $(3,2,-4)$
直線に垂直であるから求める平面の法線ベクトルも $(3,2,-4)$
$\therefore$ $\boldsymbol{3x+2(y+2)-4(z+7)=0}$ …答え

（4） 3 点 $(1,0,0),(0,-2,0),(0,0,3)$ を通る

点 $(1,0,0)$ を通るから，平面の方程式は
$a(x-1)+by+cz=0$ とおける.

$(0,-2,0)$ を通る $\Rightarrow$ $-a-2b=0$ $\Leftrightarrow$ $b=-\dfrac{1}{2}a$
$(0,0,3)$ を通る $\Rightarrow$ $-a+3c=0$ $\Leftrightarrow$ $c=\dfrac{1}{3}a$
$\therefore$ $a(x-1)-\dfrac{1}{2}ay+\dfrac{1}{3}az=0$
$a=0$ のとき平面の方程式にならないので，$a\neq 0$
両辺を a で割って，

$$x-1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=0$$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{6x-3y+2z-6=0}$ …答え