反射テスト　積分　ななめの軸における回転体の体積　02　難

1.　曲線 $y = x^2 - 3x$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を直線 $y = x$ を軸として 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

（ S 級 8 分, A 級 13 分, B 級 20 分, C 級 30 分 ）

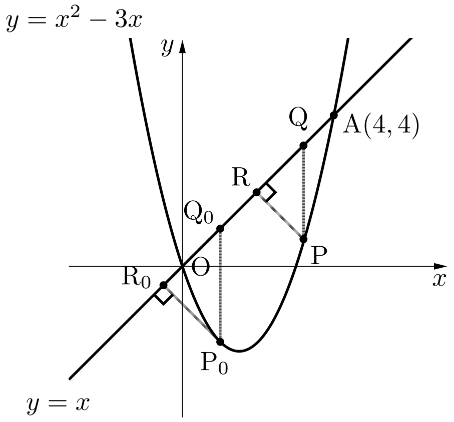
2. 曲線 $y = x^2 - 2x$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を直線 $y = x$ を軸として 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

（ S 級 6 分, A 級 10 分, B 級 16 分, C 級 25 分 ）

反射テスト　積分　ななめの軸における回転体の体積　02　難　解答解説

1.　曲線 $y = x^2 - 3x$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を直線 $y = x$ を軸として 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

（ S 級 8 分, A 級 13 分, B 級 20 分, C 級 30 分 ）



★ ななめの回転体の体積（差を考える場合）

直線 $y = x$ を t 軸とする. O を原点と考え, 右上方向が $+$ とすれば,

$$\mathbf{V} = \pi\int_{\mathrm{R_0}\text{の }t}^{\mathrm{A}\text{ の }t} \mathbf{RP^2}\,dt - \pi\int_{\mathrm{R_0}\text{の }t}^{\mathrm{O}\text{ の }t} \mathbf{RP^2}\,dt$$

この場合, 軸がななめ 45°の直線であるから, △PQR が直角二等辺三角形になる.

ゆえに　$\mathrm{RP} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}$

曲線上に点 P, 直線上に点 Q, R を次のように定める. $\mathrm{P}(x, x^2 - 3x)$, $\mathrm{Q}(x, x)$ とし, 点 P から直線に下ろした垂線の足を点 R とすれば, PQR は直角二等辺三角形になり, $\mathrm{RP} = \mathrm{QR} = \dfrac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}$.

$$\mathrm{PQ} = x - (x^2 - 3x) = 4x - x^2 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{RP}^2 = \left(\frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(4x - x^2)^2}{2}$$

直線 $y = x$ を t 軸とする. O を原点と考え, 右上方向が $+$ とする. 点 R の t 座標は,

$$t = \mathrm{OQ} - \mathrm{QR} = \sqrt{2}x - \frac{4x - x^2}{\sqrt{2}} = \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\ \frac{dt}{dx} = \sqrt{2}x - \sqrt{2} \quad\Leftrightarrow\quad dt = \sqrt{2}\,(x - 1)\,dx$$

点 P が原点 O から曲線上を点 A まで動くとき, t 座標が最小になる点を $\mathrm{R_0}$, このときの点 P, Q もそれぞれ点 $\mathrm{P_0}, \mathrm{Q_0}$とする. $\mathrm{R_0P_0}$は曲線の接線となり, 直線と直交するので傾きは -1. 曲線の微分係数 $y' = 2x - 3$ と比較して,

$$2x - 3 = -1 \quad\Leftrightarrow\quad x = 1 \qquad \therefore\quad \mathrm{P_0}(1, -2)\ ,\ \mathrm{Q_0}(1, 1)\ ,\ \mathrm{R_0}\text{の } t = \frac{1^2 - 2\cdot1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

	$\mathrm{R_0}$	$\cdots$	O	$\cdots$	A
t	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$4\sqrt{2}$
x	1	$\cdots$	0	$\cdots$	4

点 A は曲線と直線の交点であるから, 連立方程式を解いて, 点 A(4, 4)

$$\therefore\quad \mathrm{V} = \pi\int_{\mathrm{R_0}\text{の }t}^{\mathrm{A}\text{ の }t} \mathrm{RP}^2\,dt - \pi\int_{\mathrm{R_0}\text{の }t}^{\mathrm{O}\text{ の }t} \mathrm{RP}^2\,dt = \pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{4\sqrt{2}} \frac{(4x - x^2)^2}{2}\,dt - \pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} \frac{(4x - x^2)^2}{2}\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^4 (4x - x^2)^2\cdot\sqrt{2}\,(x - 1)\ dx - \frac{\pi}{2}\int_1^0 (4x - x^2)^2\cdot\sqrt{2}\,(x - 1)\ dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_1^4 (4x - x^2)^2\cdot\sqrt{2}\,(x - 1)\ dx + \frac{\pi}{2}\int_0^1 (4x - x^2)^2\cdot\sqrt{2}\,(x - 1)\ dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^4 (x^4 - 8x^3 + 16x^2)(x - 1)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\int_0^4 (x^5 - 9x^4 + 24x^3 - 16x^2)\,dx$$

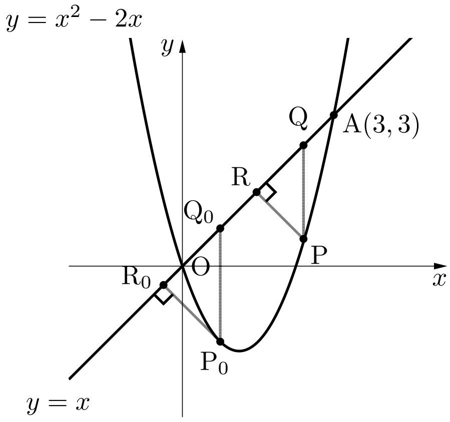
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{9}{5}x^5 + 6x^4 - \frac{16}{3}x^3\right]_0^4$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cdot 4^3\left(\frac{1}{6}\cdot4^3 - \frac{9}{5}\cdot4^2 + 6\cdot4 - \frac{16}{3}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cdot 4^3\,\frac{320 - 864 + 720 - 160}{30} = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\cdot 4^3\cdot\frac{16}{30} = \boldsymbol{\frac{256\sqrt{2}}{15}\pi}$$

2. 曲線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ を軸として 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

（ S 級 6 分，A 級 10 分，B 級 16 分，C 級 25 分 ）



★ ななめの回転体の体積（差を考える場合）

直線 $y=x$ を t 軸とする．O を原点と考え，右上方向が + とすれば，

$$\mathbf{V}=\pi\int_{\mathbf{R_0}\text{の } t}^{\mathbf{A}\text{ の } t}\mathbf{RP^2}\,dt-\pi\int_{\mathbf{R_0}\text{の } t}^{\mathbf{O}\text{ の } t}\mathbf{RP^2}\,dt$$

この場合，軸がななめ 45°の直線であるから，△PQR が直角二等辺三角形になる．

ゆえに　$\mathrm{RP}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}$

曲線上に点 P, 直線上に点 Q, R を次のように定める．$\mathrm{P}(x,x^2-2x)$，$\mathrm{Q}(x,x)$ とし，点 P から直線に下ろした垂線の足を点 R とすれば，PQR は直角二等辺三角形になり，$\mathrm{RP}=\mathrm{QR}=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}$.

$$\mathrm{PQ}=x-(x^2-2x)=3x-x^2 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{RP}^2=\left(\frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{(3x-x^2)^2}{2}$$

直線 $y=x$ を t 軸とする．O を原点と考え，右上方向が + とする．点 R の t 座標は，

$$t=\mathrm{OQ}-\mathrm{QR}=\sqrt{2}x-\frac{3x-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{x^2-x}{\sqrt{2}} \qquad \therefore\ \frac{dt}{dx}=\sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Leftrightarrow\quad dt=\frac{1}{\sqrt{2}}(2x-1)\,dx$$

点 P が原点 O から曲線上を点 A まで動くとき，t 座標が最小になる点を $\mathrm{R_0}$，このときの点 P, Q もそれぞれ点 $\mathrm{P_0}, \mathrm{Q_0}$とする．$\mathrm{R_0P_0}$は曲線の接線となり，直線と直交するので傾きは -1. 曲線の微分係数 $y'=2x-2$ と比較して，

$$2x-2=-1 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad \mathrm{P_0}\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right),\ \mathrm{Q_0}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{R_0}\text{の } t=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

	$\mathrm{R_0}$	$\cdots$	O	$\cdots$	A
t	$-\frac{1}{4\sqrt{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$3\sqrt{2}$
x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	3

点 A は曲線と直線の交点であるから，連立方程式を解いて，点 A(3, 3)

$$\therefore\quad \mathrm{V}=\pi\int_{\mathrm{R_0}\text{の } t}^{\mathrm{A}\text{ の } t}\mathrm{RP}^2\,dt-\pi\int_{\mathrm{R_0}\text{の } t}^{\mathrm{O}\text{ の } t}\mathrm{RP}^2\,dt=\pi\int_{-\frac{1}{4\sqrt{2}}}^{3\sqrt{2}}\frac{(3x-x^2)^2}{2}\,dt-\pi\int_{-\frac{1}{4\sqrt{2}}}^{0}\frac{(3x-x^2)^2}{2}\,dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{3}(3x-x^2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(2x-1)\,dx-\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{0}(3x-x^2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(2x-1)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{3}(3x-x^2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(2x-1)\,dx+\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}}(3x-x^2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(2x-1)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^3(x^4-6x^3+9x^2)(2x-1)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^3(2x^5-13x^4+24x^3-9x^2)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}x^6-\frac{13}{5}x^5+6x^4-3x^3\right]_0^3$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot 3^3\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{13}{5}\cdot 3^2+6\cdot 3-3\right)$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot 3^3\,\frac{45-117+90-15}{5}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot 3^3\cdot\frac{3}{5}=\boldsymbol{\frac{81\sqrt{2}}{20}\pi}$$