反射テスト　積分　ななめの軸における回転体の体積　01

1. 曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x$ で囲まれた部分を直線 $y = x$ を軸として 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

（ S 級 4 分, A 級 7 分, B 級 12 分, C 級 20 分 ）

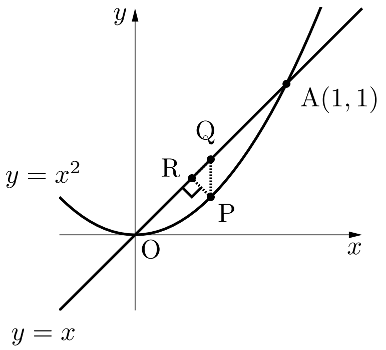
2. 曲線 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ を軸として 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

（ S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 14 分, C 級 25 分 ）

反射テスト　積分　ななめの軸における回転体の体積　01　解答解説

1.　曲線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ を軸として 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

（ S 級 4 分, A 級 7 分, B 級 12 分, C 級 20 分 ）



★ ななめの回転体の体積

直線 $y=x$ を t 軸とする. O を原点と考え, 右上方向が + とすれば,

$$\mathbf{V}=\boldsymbol{\pi}\int_{\mathbf{O}\ \text{の}\ t}^{\mathbf{A}\ \text{の}\ t}\mathbf{RP^2}\,\boldsymbol{dt}$$

この場合, 軸がななめ 45°の直線であるから, △PQR が直角二等辺三角形になる.

ゆえに　$\mathrm{RP}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}$

曲線上に点 P, 直線上に点 Q, R を次のように定める.

$\mathrm{P}(x, x^2)$, $\mathrm{Q}(x, x)$ とし, 点 R を点 P から直線に下ろした垂線の足とする.

すると △PQR は直角二等辺三角形になり, $\mathrm{RP}=\mathrm{QR}=\dfrac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}$.

$$\mathrm{PQ}=x-x^2 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{RP}=\frac{x-x^2}{\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{RP}^2=\frac{(x-x^2)^2}{2}$$

直線 $y=x$ を t 軸とする. O を原点と考え, 右上方向が + とする. 点 R の t 座標を考えて,

$$t=\mathrm{OR}=\mathrm{OQ}-\mathrm{QR}=\sqrt{2}x-\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{x+x^2}{\sqrt{2}}$$

	O	→	A
t	0	→	$\sqrt{2}$
x	0	→	1

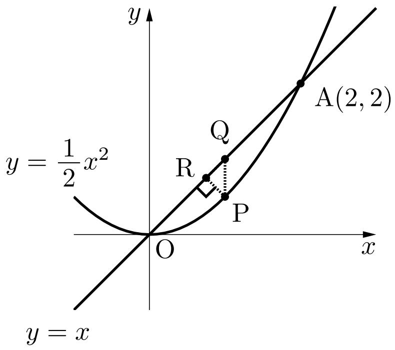
点 A は曲線と直線の交点だから連立解

ゆえに　$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}x \quad\Leftrightarrow\quad dt=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+2x)\,dx$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \mathrm{V}&=\pi\int_{\mathrm{O}\ \text{の}\ t}^{\mathrm{A}\ \text{の}\ t}\mathrm{RP}^2\,dt=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{(x-x^2)^2}{2}\,dt\\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^1(x-x^2)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+2x)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1x^2(1-x)^2(1+2x)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1x^2(1-2x+x^2)(1+2x)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1x^2(1-3x^2+2x^3)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x^2-3x^4+2x^5)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{3}x^6\right]_0^1\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\right)\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{5-9+5}{15}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{15}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{60}\pi}
\end{aligned}$$

2.　曲線 $y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた部分を直線 $y=x$ を軸として 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

（ S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 14 分, C 級 25 分 ）



★ ななめの回転体の体積

直線 $y=x$ を t 軸とする. O を原点と考え, 右上方向が $+$ とすれば,

$$\mathbf{V}=\pi\int_{\mathbf{O}\text{ の }t}^{\mathbf{A}\text{ の }t}\mathbf{RP^2}\,dt$$

この場合, 軸がななめ 45°の直線であるから, △PQR が直角二等辺三角形になる.

ゆえに　$\mathrm{RP}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{PQ}$

曲線上に点 P, 直線上に点 Q, R を次のように定める.

$\mathrm{P}\left(x, \frac{1}{2}x^2\right)$, $\mathrm{Q}(x, x)$ とし, 点 R を点 P から直線に下ろした垂線の足とする.

すると △PQR は直角二等辺三角形になり, $\mathrm{RP}=\mathrm{QR}=\frac{\mathrm{PQ}}{\sqrt{2}}$.

$$\mathrm{PQ}=x-\frac{1}{2}x^2 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{RP}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}x^2\right) \quad\Rightarrow\quad \mathrm{RP}^2=\frac{\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)^2}{2}$$

直線 $y=x$ を t 軸とする. O を原点と考え, 右上方向が $+$ とする. 点 R の t 座標を考えて,

$$t=\mathrm{OR}=\mathrm{OQ}-\mathrm{QR}=\sqrt{2}x-\frac{x-\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{2}}=\frac{2x+x^2}{2\sqrt{2}}$$

	O	→	A
t	0	→	$2\sqrt{2}$
x	0	→	2

点 A は曲線と直線の交点だから連立解

ゆえに　$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}x \quad\Leftrightarrow\quad dt=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+x)\,dx$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \mathrm{V}&=\pi\int_{\mathrm{O}\text{ の }t}^{\mathrm{A}\text{ の }t}\mathrm{RP}^2\,dt=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)^2}{2}\,dt\\
&=\frac{\pi}{2}\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+x)\,dx\\
&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^2\frac{1}{4}x^2(2-x)^2(1+x)\,dx\\
&=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\int_0^2 x^2(4-4x+x^2)(1+x)\,dx\\
&=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\int_0^2(4x^2-3x^4+x^5)\,dx\\
&=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{5}x^5+\frac{1}{6}x^6\right]_0^2\\
&=\frac{\sqrt{2}\pi}{16}\left(\frac{32}{3}-\frac{96}{5}+\frac{32}{3}\right)\\
&=\sqrt{2}\pi\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{6}{5}+\frac{2}{3}\right)=\sqrt{2}\pi\cdot\frac{10-18+10}{15}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{15}\pi}
\end{aligned}$$

☆余談　(1) と (2) の立体が相似になることに気づけば, 相似比 1 : 2 から, (1) の体積の 8 倍で (2) が求められる.