# 反射テスト　積分　バームクーヘン分割による積分　01

**1.**　曲線 $y = x^2$ と $x$ 軸および直線 $x = 2$ , $x = 3$ とで囲まれた部分を $y$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

（ $S$ 級 50 秒, $A$ 級 3 分, $B$ 級 6 分, $C$ 級 10 分 ）

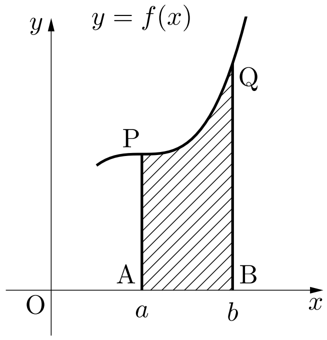
**2.** 曲線 $y=-2(x-1)(x-2)$ と $x$ 軸とで囲まれた部分を $y$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

（ $S$ 級 1 分 20 秒, $A$ 級 6 分, $B$ 級 9 分, $C$ 級 14 分 ）

# 反射テスト　積分　バームクーヘン分割による積分　01　解答解説

**1.**　曲線 $y = x^2$ と $x$ 軸および直線 $x = 2$, $x = 3$ とで囲まれた部分を $y$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

（ $S$ 級 50 秒, $A$ 級 3 分, $B$ 級 6 分, $C$ 級 10 分 ）




**★ バームクーヘン分割による積分**

曲線 $y = f(x)$ と $x$ 軸および直線 $x = a$, $x = b\,(0 \leqq a < b)$ とで囲まれた部分を $y$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V の公式は,

$$\boldsymbol{\mathrm{V} = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx}$$

$2\pi x f(x)$ について考えよう. $2\pi x$ は線分 PA を $y$ 軸の周りに 1 回転してできる円柱の底面の周りの長さに相当し, これに PA $= f(x)$ を掛けると, この円柱の側面積になる. つまり $2\pi x f(x)$ は円柱の側面積であり, これを $a$ から $b$ まで $x$ について定積分したものは V になる. 側面積を積み重ねるイメージがバームクーヘンを連想させる.

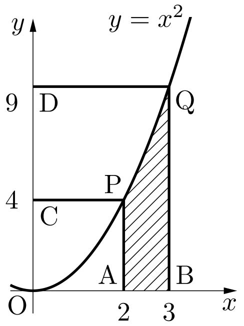
**★ バームクーヘン分割による積分** の公式より,

$$\mathrm{V} = 2\pi \int_2^3 x \cdot x^2\, dx = 2\pi \int_2^3 x^3\, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{4}x^4\right]_2^3$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(3^4 - 2^4\right) = \frac{\pi}{2} \cdot (81 - 16) = \boldsymbol{\frac{65}{2}\pi}$$

☆別解　上の公式を知らなくてもどうにかなる.




$$\begin{cases} \text{線分 PA を } y \text{ 軸の周りに 1 回転してできる円柱の体積を } \mathrm{V}_1 \\ \text{線分 QB を } y \text{ 軸の周りに 1 回転してできる円柱の体積を } \mathrm{V}_2 \end{cases}$$ とすれば,

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1 - \pi \int_4^9 x^2\, dy$$

↑ 積分部分は曲線 PQ を $y$ 軸の周りに 1 回転してできた立体の体積

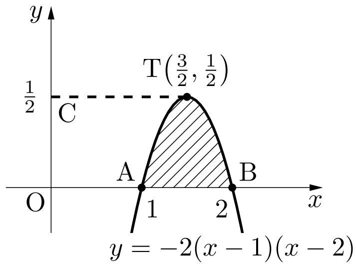
$$\therefore \quad \mathrm{V} = \pi \cdot 3^2 \cdot 9 - \pi \cdot 2^2 \cdot 4 - \pi \int_4^9 y\, dy$$

$$= 81\pi - 16\pi - \pi \left[\frac{1}{2}y^2\right]_4^9$$

$$= 65\pi - \frac{1}{2}\pi\,(81 - 16) = \boldsymbol{\frac{65}{2}\pi}$$

**2.** 曲線 $y=-2(x-1)(x-2)$ と $x$ 軸とで囲まれた部分を $y$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ.

（ $S$ 級 1 分 20 秒, $A$ 級 6 分, $B$ 級 9 分, $C$ 級 14 分 ）




曲線と $x$ 軸との交点の $x$ 座標は, $-2(x-1)(x-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=1,2$

これらを A$(1,0)$, B$(2,0)$ とおく.

左図の斜線部を $y$ 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積が V である.

★ **バームクーヘン分割による積分** の公式より,

$$\mathrm{V}=2\pi\int_1^2 x\cdot\{-2(x-1)(x-2)\}\,dx=-4\pi\int_1^2\left(x^3-3x^2+2x\right)dx$$

$$=-4\pi\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_1^2=-4\pi\left\{(4-8+4)-\left(\frac{1}{4}-1+1\right)\right\}=\boldsymbol{\pi}$$

★ 公式 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \boldsymbol{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(2\gamma-\alpha-\beta)}$

これを使うともっと早い.

$$\mathrm{V}=-4\pi\int_1^2 x(x-1)(x-2)\,dx=\frac{-4\pi}{12}(2-1)^3(2\times0-1-2)=\boldsymbol{\pi}$$

☆別解 $\begin{cases}\text{曲線 AT を } y \text{ 軸の周りに 1 回転してできる円柱の体積を } \mathrm{V}_1\\ \text{曲線 TB を } y \text{ 軸の周りに 1 回転してできる円柱の体積を } \mathrm{V}_2\end{cases}$ とすれば, $\mathrm{V}=\mathrm{V}_2-\mathrm{V}_1$

問題は $x^2$ を $y$ でどう表すかだが, $x$ を $y$ で表せばよいので, 方程式を $x$ について解けばよい.

$$y=-2(x-1)(x-2) \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-6x+4+y=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-2(4+y)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1-2y}}{2}$$

図における曲線 AT を表すのが $x=\dfrac{3-\sqrt{1-2y}}{2}$ で, 曲線 TB を表すのが, $x=\dfrac{3+\sqrt{1-2y}}{2}$

ただし, どちらの場合も $2x^2-6x+4+y=0$ の判別式は 0 以上だから,

$$\mathrm{D}/4\geqq0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-2y\geqq0 \quad \Leftrightarrow \quad y\leqq\frac{1}{2}$$

$$x^2=\frac{\left(3\pm\sqrt{1-2y}\right)^2}{4}=\frac{9\pm6\sqrt{1-2y}+1-2y}{4}=\frac{5-y\pm3\sqrt{1-2y}}{2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{V}=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3+\sqrt{1-2y}}{2}\right)^2dy-\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{3-\sqrt{1-2y}}{2}\right)^2dy$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{5-y+3\sqrt{1-2y}}{2}-\frac{5-y-3\sqrt{1-2y}}{2}\right)dy$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}3\sqrt{1-2y}\,dy$$

$$=3\pi\left[\frac{2}{3}(1-2y)^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{-2}\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\pi\left[(1-2y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}}=-\pi(0-1)=\boldsymbol{\pi}$$

☆公式の威力がよく分かる問題である. 公式を知ると知らないでは計算量にかなり差がでる.