反射テスト　積分　カテナリー曲線　01

1.　曲線 $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ の $0 \leqq x \leqq 1$ の部分の長さを求めよ.（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

2. 実定数 a と，$t>0$ に対して，曲線 $y=a\left(\dfrac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)$ の $0 \leqq x \leqq t$ の部分の長さを求めよ．

（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

反射テスト　積分　カテナリー曲線　01

1. 　曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ の $0\leqq x\leqq 1$ の部分の長さを求めよ.（ S 級 1 分, A 級 2 分, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

★ 曲線の長さ

$\left\{\ \text{曲線 } y=f(x)\quad (\ a\leqq x\leqq b\ )\ \Rightarrow\ \text{曲線の長さは, } \displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\right.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\\
&=\int_0^1\sqrt{1+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}\,dx\\
&=\int_0^1\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx\\
&=\int_0^1\sqrt{\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}}\,dx\\
&=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx\\
&=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1\\
&=\frac{e-e^{-1}}{2}-\frac{1-1}{2}=\boldsymbol{\frac{e-e^{-1}}{2}}
\end{aligned}$$

2. 実定数 a と，$t>0$ に対して，曲線 $y=a\left(\dfrac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right)$ の $0 \leqq x \leqq t$ の部分の長さを求めよ．

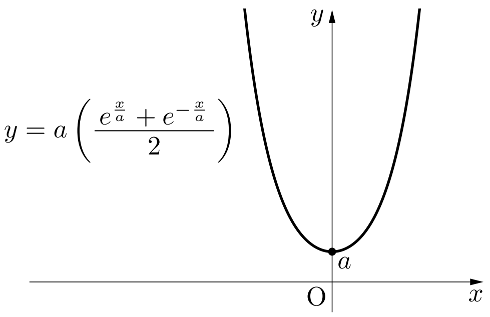
（ S 級 1 分 30 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

★ 曲線の長さ

$\left\{ \text{曲線 } y=f(x) \quad (a \leqq x \leqq b) \quad \Rightarrow \quad \text{曲線の長さは，} \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx \right.$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \\
&=\int_0^t \sqrt{1+\frac{e^{\frac{2x}{a}}-2+e^{-\frac{2x}{a}}}{4}}\,dx \\
&=\int_0^t \sqrt{\frac{e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}}{4}}\,dx \\
&=\int_0^t \sqrt{\frac{\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4}}\,dx \\
&=\int_0^t \frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}\,dx \\
&=a\left[\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2}\right]_0^t \\
&=\boldsymbol{a\left(\frac{e^{\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{a}}}{2}\right)}
\end{aligned}$$



★ カテナリー曲線・懸垂線（ *catenary* ）

ひもや鎖の両端を持ってできる曲線である．

蜘蛛の糸や吊り橋なども該当する．

catenary はラテン語の *catena*(鎖) が語源．

$x=0$ からの $x=t$ までの曲線の長さは，$a\left(\dfrac{e^{\frac{t}{a}}-e^{-\frac{t}{a}}}{2}\right)$

形は放物線と似ていて，頂点付近は，$y=a+\dfrac{x^2}{2a}$ で近似できる．