反射テスト　積分　曲線の長さ　02

1.　次の関数について（　）内の定義域における曲線の長さを求めよ.（ S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 11 分, C 級 15 分 ）

(1)　$y=\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2-2)^3}$　$(2 \leqq x \leqq 3)$

(2)　$y=2x\sqrt{x}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

(3)　$y=\log(x^2-1)$　$(2 \leqq x \leqq 3)$

2. 次の関数について（　）内の定義域における曲線の長さを求めよ.（ S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 11 分, C 級 15 分 ）

(1) $y = \left(4x^2 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ $\quad (0 \leqq x \leqq 1)$

(2) $y = \sqrt{4 - x^2}$ $\quad (0 \leqq x \leqq 1)$

(3) $y = \log(\cos x)$ $\quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}\right)$

反射テスト　積分　曲線の長さ　02　解答解説

1.　次の関数について（　）内の定義域における曲線の長さを求めよ．（ S 級 5 分，A 級 8 分，B 級 11 分，C 級 15 分 ）

★ 曲線の長さ

$$\begin{cases} \text{曲線 } x=f(t),\ y=g(t) \quad (a \leqq t \leqq b) \Rightarrow \text{曲線の長さは，} \displaystyle\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt \\ \text{曲線 } y=f(x) \quad (a \leqq x \leqq b) \Rightarrow \text{曲線の長さは，} \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx \end{cases}$$

☆注意　t について積分するのか，x について積分するのかに注意．

(1)　$y=\frac{1}{3}\sqrt{(x^2-2)^3}$　$(2 \leqq x \leqq 3)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\cdot\left((x^2-2)^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{1}{2}(x^2-2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2x=x\sqrt{x^2-2}$

$\int_2^3 \sqrt{1+(x\sqrt{x^2-2})^2}\,dx$

$=\int_2^3 \sqrt{1+x^2(x^2-2)}\,dx=\int_2^3 \sqrt{(x^4-2x^2+1)}\,dx$

$=\int_2^3 |x^2-1|\,dx=\int_2^3 (x^2-1)\,dx$　←☆

$=\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_2^3=(9-3)-\left(\frac{8}{3}-2\right)$

$=6-\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{16}{3}}$　**…答え**

☆ $2 \leqq x \leqq 3$ において，$x^2-1>0$

(2)　$y=2x\sqrt{x}$　$(0 \leqq x \leqq 1)$

$\frac{dy}{dx}=2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=3x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}$

$\int_0^1 \sqrt{1+(3\sqrt{x})^2}\,dx$

$=\int_0^1 \sqrt{1+9x}\,dx$

$=\left[\frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=\frac{2}{27}\left[(1+9x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=\mathbf{\frac{2}{27}(10\sqrt{10}-1)}$　**…答え**

(3)　$y=\log(x^2-1)$　$(2 \leqq x \leqq 3)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{(x^2-1)'}{x^2-1}=\frac{2x}{x^2-1}$

$\int_2^3 \sqrt{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\,dx=\int_2^3 \sqrt{1+\frac{4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx$

$=\int_2^3 \sqrt{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}}\,dx=\int_2^3 \left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|dx$

$=\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx$　←☆

$=\int_2^3 \left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$　←帯分数化

$=\int_2^3 \left\{1+\frac{(x+1)-(x-1)}{x^2-1}\right\}dx$　←通分の逆

$=\int_2^3 \left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\left[x+\log|x-1|-\log|x+1|\right]_2^3$

$=(3+\log 2-\log 4)-(2+\log 1-\log 3)$

$=\mathbf{1-\log 2+\log 3}$　**…答え**

$=\mathbf{1+\log\frac{3}{2}}$　**…答え**

☆ $2 \leqq x \leqq 3$ において，$x^2-1>0$

2. 次の関数について（ ）内の定義域における曲線の長さを求めよ.（ S 級 5 分, A 級 8 分, B 級 11 分, C 級 15 分 ）

(1) $y = \left(4x^2 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ （$0 \leqq x \leqq 1$）

$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(4x^2 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 8x = 12x\left(4x^2 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\int_0^1 \sqrt{1 + \left\{12x\left(4x^2 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^2}\, dx$

$= \int_0^1 \sqrt{1 + 144x^2\left(4x^2 + \frac{1}{3}\right)}\, dx$

$= \int_0^1 \sqrt{576x^4 + 48x^2 + 1}\, dx$

$= \int_0^1 \sqrt{(24x^2 + 1)}\, dx = \int_0^1 (24x^2 + 1)\, dx$ ←☆

$= \left[8x^3 + x\right]_0^1 = (8 + 1) - (0 + 0) = \mathbf{9}$ **…答え**

☆ $0 \leqq x \leqq 1$ において, $24x^2 + 1 > 0$

(2) $y = \sqrt{4 - x^2}$ （$0 \leqq x \leqq 1$）

$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$x = 2\sin t$ とおいて, $dx = 2\cos t dt$

「 $x = 0 \to x = 1$ 」⇔「 $t = 0 \to t = \frac{\pi}{6}$ 」

$\int_0^1 \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2}}\, dx$

$= \int_0^1 \sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\, dx = 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} \cdot 2\cos t\, dt$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left|\frac{1}{\cos t}\right| \cdot \cos t\, dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} 1\, dt$ ←☆ 1

$= 2\left[\, t\, \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \boldsymbol{\frac{1}{3}\pi}$ **…答え**

☆ 1 $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{3}$ において, $\cos t > 0$

☆別解 $y = \sqrt{4 - x^2}$は半径 2 の円を表すので, $2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi$

(3) $y = \log(\cos x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x)'}{\cos x} = -\tan x$

$t = \sin x$ とおくと, $dt = \cos x dx$

$x = 0 \to x = \frac{\pi}{3}$ ⇔ $t = 0 \to t = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + (-\tan x)^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1 + \tan^2 x}\, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left|\frac{1}{\cos x}\right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\, dx$ ←☆

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\, dt$ ←置換

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt = \frac{1}{2}\left[\log|1+t| - \log|1-t|\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \frac{1}{2}\left\{\left(\log\left|1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right| - \log\left|1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right|\right) - (\log 1 - \log 1)\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(\log\left|\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|\right) = \frac{1}{2}\left(\log\left|\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right|\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2\log(2+\sqrt{3})\right) = \mathbf{\log(2+\sqrt{3})}$ **…答え**

☆ $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3}$において, $\cos x > 0$