反射テスト　積分　曲線の長さ　01

1.　次の関数について（　）内の定義域における曲線の長さを求めよ.（ S 級 4 分 10 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1)　$x = 3 + 2\cos t$,　$y = 2\sin t$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$

(2)　$x = 2t^3$,　$y = 3t^2$　$(0 \leqq t \leqq 1)$

(3)　$x = \cos^3 t$,　$y = \sin^3 t$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の関数について（　）内の定義域における曲線の長さを求めよ.（ S 級 4 分 40 秒, A 級 7 分, B 級 11 分, C 級 15 分 ）

(1) $x = 5 - 3\cos t$, $y = 3\sin t + 1$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$

(2) $x = t^3 - 3t^2$, $y = \dfrac{12}{5}\sqrt{2t^5}$ $(0 \leqq t \leqq 3)$

(3) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　積分　曲線の長さ　01　解答解説

1.　次の関数について（　）内の定義域における曲線の長さを求めよ．（ S 級 4 分 10 秒，A 級 6 分，B 級 9 分，C 級 13 分 ）

★ 曲線の長さ

$$\begin{cases} \text{曲線 } x=f(t),\ y=g(t)\quad (\ a \leqq t \leqq b\ ) \Rightarrow \text{ 曲線の長さは，} \displaystyle\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt \\ \text{曲線 } y=f(x)\quad (\ a \leqq x \leqq b\ ) \Rightarrow \text{ 曲線の長さは，} \displaystyle\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx \end{cases}$$

☆注意　t について積分するのか，x について積分するのかに注意．

(1)　$x=3+2\cos t$ ，$y=2\sin t$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\frac{dx}{dt}=-2\sin t$ ，$\frac{dy}{dt}=2\cos t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{3}} 1\,dt$$
$$=2\,[\ t\ ]_0^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi}\quad \textbf{…答え}$$

☆媒介変数表示をグラフに表せば，半径 2 の円である．
よって，題意は半径 2，中心角 $\frac{\pi}{3}$ の弧の長さであり，
　$2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$　となる．
これはどちらの方法でもできるようにしておこう．

(2)　$x=2t^3$ ，$y=3t^2$　($0 \leqq t \leqq 1$)

$\frac{dx}{dt}=6t^2$ ，$\frac{dy}{dt}=6t$
☆ $s=t^2+1$ とおいて，$ds=2tdt \Leftrightarrow tdt=\frac{1}{2}ds$
　$t=0 \to t=1 \Leftrightarrow s=1 \to s=2$

$$\int_0^1 \sqrt{(6t^2)^2+(6t)^2}\,dt$$
$$=6\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\,dt$$
$$=3\int_1^2 \sqrt{s}\,ds\quad \leftarrow\text{☆置換}$$
$$=3\cdot\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$
$$=2\left(\sqrt{2}^3-1^3\right)=\boldsymbol{2\left(2\sqrt{2}-1\right)}\quad \textbf{…答え}$$

(3)　$x=\cos^3 t$ ，$y=\sin^3 t$　$\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$

$\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$ ，$\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2}\,dt$$
$$=3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$
$$=3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt$$
$$=3\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\sin t\cos t|\,dt$$
$$=3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t\cos t\,dt\quad \leftarrow☆$$
$$=3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin 2t\,dt=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t\,dt$$
$$=\frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2t)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}\quad \textbf{…答え}$$

☆ $0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$ において，$\sin t\cos t \geqq 0$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の関数について（　）内の定義域における曲線の長さを求めよ.（ S 級 4 分 40 秒, A 級 7 分, B 級 11 分, C 級 15 分 ）

(1) $x = 5 - 3\cos t$, $y = 3\sin t + 1$ $\left(0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{dx}{dt} = 3\sin t$, $\frac{dy}{dt} = 3\cos t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}\,dt$$
$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dt$$
$$= 3[\,t\,]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}$$ **…答え**

☆別解

$3 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi$

(2) $x = t^3 - 3t^2$, $y = \frac{12}{5}\sqrt{2t^5}$ $(0 \leqq t \leqq 3)$

$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t$, $\frac{dy}{dt} = \frac{12}{5}\sqrt{2} \cdot \frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}$

☆ $s = t^2 + 1$ とおいて, $ds = 2tdt \Leftrightarrow tdt = \frac{1}{2}ds$

$t = 0 \to t = 1 \Leftrightarrow s = 1 \to s = 2$

$$\int_0^3 \sqrt{(3t^2 - 6t)^2 + \left(6\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}\right)^2}\,dt$$
$$= \int_0^3 \sqrt{9t^4 - 36t^3 + 36t^2 + 72t^3}\,dt$$
$$= 3\int_0^3 \sqrt{t^4 + 4t^3 + 4t^2}\,dt$$
$$= 3\int_0^3 \sqrt{(t^2 + 2t)^2}\,dt$$
$$= 3\int_0^3 |\,(t^2 + 2t)^2\,|\,dt$$
$$= 3\int_0^3 (t^2 + 2t)\,dt \quad \leftarrow ☆$$
$$= 3\left[\frac{1}{3}t^3 + t^2\right]_0^3 = 3\{(9 + 9) - (0 - 0)\} = \boldsymbol{54}$$ **…答え**

☆ $0 \leqq t \leqq 3$ において, $t^2 + 2t \geqq 0$

(3) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$

$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$, $\frac{dy}{dt} = \sin t$

$$\int_0^{\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt$$
$$= \int_0^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,dt$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 - (1 - 2\sin^2 \tfrac{t}{2})}\,dt$$
$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\int_0^{\pi} |\sin \tfrac{t}{2}|\,dt$$
$$= 2\int_0^{\pi} \sin \tfrac{t}{2}\,dt \quad \leftarrow ☆$$
$$= 2\left[2 \cdot \left(-\cos \tfrac{t}{2}\right)\right]_0^{\pi}$$
$$= -4\left[\cos \frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = -4\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \boldsymbol{4}$$ **…答え**

☆ $0 \leqq t \leqq \pi$ において, $\sin \frac{t}{2} \geqq 0$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）