反射テスト　積分　y 軸の周りの回転体の体積　01

1.　次の曲線と直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1)　$y = x^2$, $y = 16$.

(2)　$y = \log x$, y 軸 , $y = -1$, $y = 1$.

(3)　$y = 1 - \sqrt{x}$, x 軸 , y 軸.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の曲線と直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1) $y = x^2 - 2$, $y = 0$, $y = 1$.

(2) $y = \log(1 - x)$, y 軸 , $y = -1$.

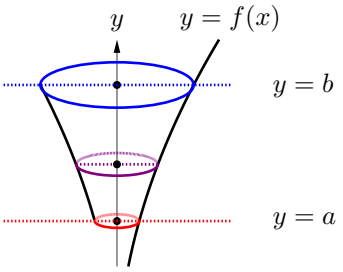
(3) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, x 軸 , y 軸.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　積分　y 軸の周りの回転体の体積　01　解答解説

1.　次の曲線と直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）



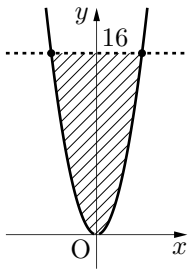
★ y 軸での回転体の体積 V

曲線 $y=f(x)$ と, y 軸 , 直線 $y=a$, $y=b$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させたときの体積 V とするとき,

$$\boldsymbol{V=\pi\int_a^b x^2\,dy=\pi\int_a^b \{f^{-1}(y)\}^2\,dy}$$

☆斜線部の円盤の面積 πx^2 を縦に積み重ねるイメージ.

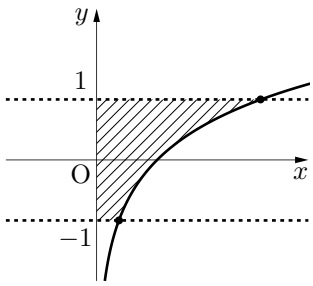
(1)　$y=x^2$, $y=16$.



$x^2=y$ であるから,

$$\begin{aligned}&\pi\int_0^{16} x^2\,dy\\ =\ &\pi\int_0^{16} y\,dy \quad = \quad \pi\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{16}\\ =\ &\boldsymbol{128\pi}\end{aligned}$$

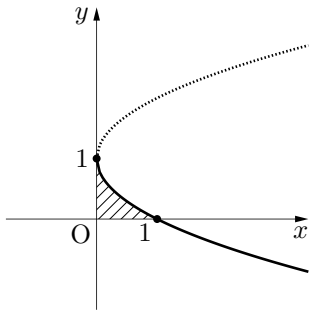
(2)　$y=\log x$, y 軸 , $y=-1$, $y=1$.



$y=\log x \quad \Leftrightarrow \quad x=e^y$ であるから,

$$\begin{aligned}&\pi\int_{-1}^{1} x^2\,dy\\ =\ &\pi\int_{-1}^{1} (e^y)^2\,dy \quad = \quad \pi\int_{-1}^{1} e^{2y}\,dy\\ =\ &\pi\left[\tfrac{1}{2}e^{2y}\right]_{-1}^{1} \quad = \quad \boldsymbol{\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\pi}\end{aligned}$$

(3)　$y=1-\sqrt{x}$, x 軸 , y 軸.



$y=1-\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x=(1-y)^2$　ただし $y\leqq 1$.

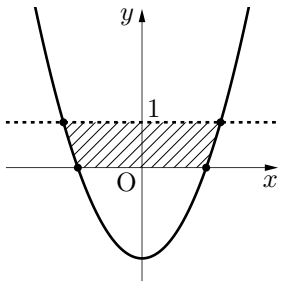
$$\begin{aligned}&\pi\int_0^{1} x^2\,dy\\ =\ &\pi\int_0^{1} (1-y)^4\,dy \quad = \quad \pi\left[-\tfrac{1}{5}(1-y)^5\right]_0^{1}\\ =\ &-\frac{1}{5}(0-1)\pi \quad = \quad \boldsymbol{\frac{1}{5}\pi}\end{aligned}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の曲線と直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

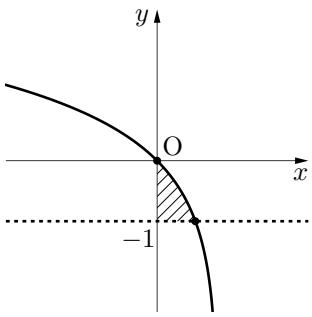
(1) $y = x^2 - 2$, $y = 0$, $y = 1$.



$x^2 = y + 2$ であるから,

$$\begin{aligned} & \pi \int_0^1 x^2\,dy \\ = \ & \pi \int_0^1 (y+2)\,dy \quad = \quad \pi \left[\tfrac{1}{2}y^2 + 2y\right]_0^1 \\ = \ & \boldsymbol{\frac{5}{2}\pi} \end{aligned}$$

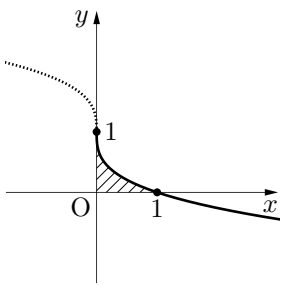
(2) $y = \log(1-x)$, y 軸 , $y = -1$.



$y = \log(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - e^y$.

$$\begin{aligned} & \pi \int_{-1}^0 x^2\,dy \\ = \ & \pi \int_{-1}^0 (1-e^y)^2\,dy \quad = \quad \pi \int_{-1}^0 \left(e^{2y} - 2e^y + 1\right) dy \\ = \ & \pi \left[\tfrac{1}{2}e^{2y} - 2e^y + y\right]_{-1}^0 \quad = \quad \boldsymbol{\left(-\frac{1}{2e^2} + \frac{2}{e} - \frac{1}{2}\right)\pi} \end{aligned}$$

(3) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, x 軸 , y 軸.



$y = 1 - \sqrt[3]{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = (1-y)^3$ ただし $y \leqq 1$.

$$\begin{aligned} & \pi \int_0^1 x^2\,dy \\ = \ & \pi \int_0^1 (1-y)^6\,dy \quad = \quad \pi \left[-\tfrac{1}{7}(1-y)^7\right]_0^1 \\ = \ & -\frac{1}{7}(0-1)\pi \quad = \quad \boldsymbol{\frac{1}{7}\pi} \end{aligned}$$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）