反射テスト　積分　 y 軸の周りの回転体の体積　01

1. 　次の曲線と直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1)　$y = x^2$ ，$y = 16$

(2)　$y = \log x$ ，y 軸, $y = -1$, $y = 1$

(3)　$y = 1 - \sqrt{x}$ ，x 軸 ，y 軸

2.　次の曲線と直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1)　$y=x^2-2$,　$y=0$,　$y=1$

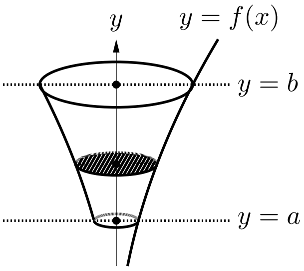
(2)　$y=\log(1-x)$,　y 軸,　$y=-1$

(3)　$y=1-\sqrt[3]{x}$,　x 軸 ,　y 軸

反射テスト　積分　y 軸の周りの回転体の体積　01　解答解説

1.　次の曲線と直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

（ S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）



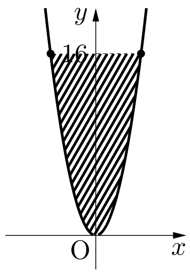
★ y 軸での回転体の体積 V

曲線 $y=f(x)$ と，y 軸，直線 $y=a$ ，$y=b$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させたときの体積 V とするとき，

$$\boldsymbol{V=\pi\int_a^b x^2\,dy=\pi\int_a^b\{f^{-1}(y)\}^2\,dy}$$

☆斜線部の円盤の面積 πx^2 を縦に積み重ねるイメージ

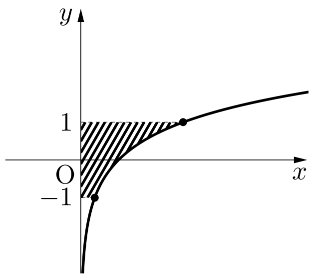
(1)　$y=x^2$ ，$y=16$



$x^2=y$ であるから，

$$\pi\int_0^{16}x^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^{16}y\,dy=\pi\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{16}$$
$$=\boldsymbol{128\pi}$$ **…答え**

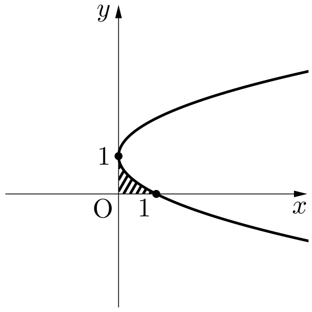
(2)　$y=\log x$ ，y 軸，$y=-1$ ，$y=1$



$y=\log x \quad\Leftrightarrow\quad x=e^y$

$$\pi\int_{-1}^{1}x^2\,dy$$
$$=\pi\int_{-1}^{1}(e^y)^2\,dy=\pi\int_{-1}^{1}e^{2y}\,dy$$
$$=\pi\left[\tfrac{1}{2}e^{2y}\right]_{-1}^{1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\pi}$$ **…答え**

(3)　$y=1-\sqrt{x}$ ，x 軸 ，y 軸



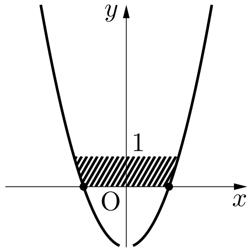
$y=1-\sqrt{x} \quad\Leftrightarrow\quad x=(1-y)^2$　ただし，$x\geqq 0$

$$\pi\int_0^1 x^2\,dy$$
$$=\pi\int_0^1(1-y)^4\,dy=\pi\left[-\tfrac{1}{5}(1-y)^5\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{5}(0-1)\pi=\boldsymbol{\frac{1}{5}\pi}$$ **…答え**

2. 次の曲線と直線で囲まれた部分を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ.

（ S 級4分, A 級6分, B 級9分, C 級13分 ）

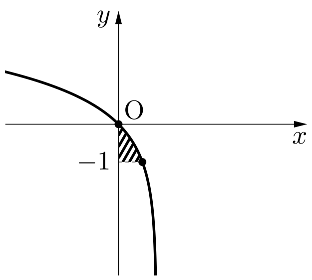
(1) $y = x^2 - 2$, $y = 0$, $y = 1$



$x^2 = y + 2$ であるから,

$$\pi \int_0^1 x^2\,dy$$
$$= \pi \int_0^1 (y+2)\,dy = \pi \left[\tfrac{1}{2}y^2 + 2y\right]_0^1$$
$$= \boldsymbol{\frac{5}{2}\pi}$$ **…答え**

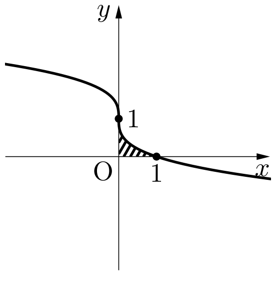
(2) $y = \log(1-x)$, y 軸, $y = -1$



$$y = \log(1-x) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - e^y$$

$$\pi \int_{-1}^0 x^2\,dy$$
$$= \pi \int_{-1}^0 (1-e^y)^2\,dy = \pi \int_{-1}^0 \left(e^{2y} - 2e^y + 1\right)dy$$
$$= \pi \left[\tfrac{1}{2}e^{2y} - 2e^y + y\right]_{-1}^0 = \boldsymbol{\left(-\frac{1}{2e^2} + \frac{2}{e} - \frac{1}{2}\right)\pi}$$ **…答え**

(3) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$, x 軸 , y 軸



$$y = 1 - \sqrt[3]{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = (1-y)^3$$

$$\pi \int_0^1 x^2\,dy$$
$$= \pi \int_0^1 (1-y)^6\,dy = \pi \left[-\tfrac{1}{7}(1-y)^7\right]_0^1$$
$$= -\frac{1}{7}(0-1)\pi = \boldsymbol{\frac{1}{7}\pi}$$ **…答え**