反射テスト　積分　x 軸の周りの回転体の体積　01

1.　次の曲線と直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

（ S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

（1）　$y = 1 - x^2$, x 軸.

（2）　$y = e^x - 1$, x 軸 , $x = 1$.

（3）　$(x-2)^2 + y^2 = 9$.　（ $x \geqq 0$ ）

2. 次の曲線と直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1) $y = x^2 - 3x$, x 軸.

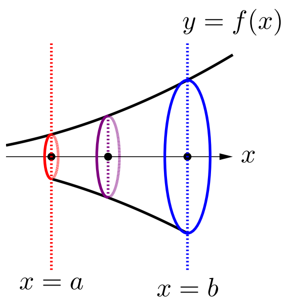
(2) $y = 2^x$, x 軸 , $x = 1$, y 軸.

(3) $\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.　（ $x \geqq 0$ ）

反射テスト　積分　x 軸の周りの回転体の体積　01　解答解説

1.　次の曲線と直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

（ S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）



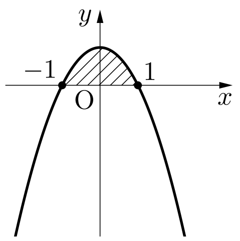
★ x 軸での回転体の体積 V

曲線 $y=f(x)$ と, x 軸 , 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させたときの体積 V とするとき,

$$\boldsymbol{V=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx}$$

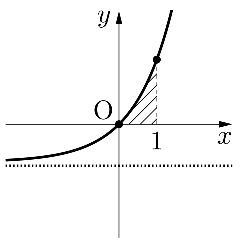
☆斜線部の円盤の面積 πy^2 を横に積み重ねるイメージ.

(1)　$y=1-x^2$, x 軸.



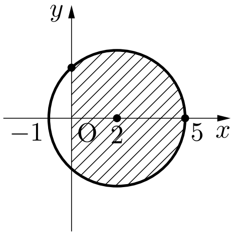
$$\begin{aligned}&\pi\int_{-1}^1 y^2\,dx\\ =\ &\pi\int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)^2 dx &&= 2\pi\int_0^1 \left(1-2x^2+x^4\right) dx\\ =\ &2\pi\left[x-\tfrac{2}{3}x^3+\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 &&= 2\pi\left(1-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{5}\right)\\ =\ &\boldsymbol{\frac{16}{15}\pi}\end{aligned}$$

(2)　$y=e^x-1$, x 軸 , $x=1$.



$$\begin{aligned}&\pi\int_0^1 y^2\,dx\\ =\ &\pi\int_0^1 \left(e^x-1\right)^2 dx &&= \pi\int_0^1 \left(e^{2x}-2e^x+1\right) dx\\ =\ &\pi\left[\tfrac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x\right]_0^1 &&= \pi\left\{\left(\tfrac{1}{2}e^2-2e+1\right)-\left(\tfrac{1}{2}-2+0\right)\right\}\\ =\ &\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(e^2-4e+5\right)\pi}\end{aligned}$$

(3)　$(x-2)^2+y^2=9$.　（ $x\geqq 0$ ）



$(x-2)^2+y^2=3^2$ （ 中心 $(2,0)$ で半径 3 の円. ）　$\Leftrightarrow$　$y^2=9-(x-2)^2$

x 切片が $-1, 5$ であるから,

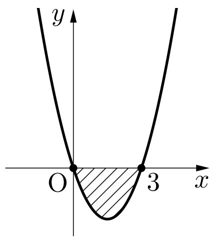
$$\begin{aligned}&\pi\int_0^5 y^2\,dx\\ =\ &\pi\int_0^5 \left\{9-(x-2)^2\right\} dx &&= \pi\left[9x-\tfrac{1}{3}(x-2)^3\right]_0^5\\ =\ &\pi\left[\left\{45-\tfrac{1}{3}(5-2)^3\right\}-\left\{0-\tfrac{1}{3}(0-2)^3\right\}\right] &&= \boldsymbol{\frac{100}{3}\pi}\end{aligned}$$

☆別解　x 軸方向に -2 平行移動して, $\pi\displaystyle\int_{-2}^3 \left(9-x^2\right) dx$ の計算が早い.

2. 次の曲線と直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ.

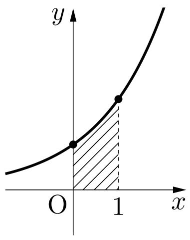
（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1) $y = x^2 - 3x$, x 軸.



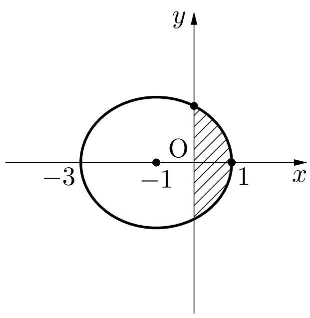
$$\pi \int_0^3 y^2 \, dx$$
$$= \pi \int_0^3 \left(x^2 - 3x\right)^2 dx = \pi \int_0^3 \left(x^4 - 6x^3 + 9x^2\right) dx$$
$$= \pi \left[\tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{3}{2}x^4 + 3x^3\right]_0^3 = \pi \left(\tfrac{243}{5} - \tfrac{243}{2} + 81\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{81}{10}\pi}$$

(2) $y = 2^x$, x 軸 , $x = 1$, y 軸.



$$\pi \int_0^1 y^2 \, dx$$
$$= \pi \int_0^1 \left(2^x\right)^2 dx = \pi \int_0^1 2^{2x} \, dx$$
$$= \pi \left[\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2^{2x}}{\log 2}\right]_0^1 = \tfrac{1}{2\log 2}\pi \left[2^{2x}\right]_0^1$$
$$= \boldsymbol{\frac{3\pi}{2\log 2}}$$

(3) $\dfrac{(x+1)^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. （ $x \geqq 0$ ）



$\dfrac{(x+1)^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{3}^2} = 1$ （ 中心 $(-1, 0)$ の楕円 ） $\Leftrightarrow$ $y^2 = 3\left\{1 - \dfrac{(x+1)^2}{4}\right\}$

x 切片が -3 , 1 であるから,

$$\pi \int_0^1 y^2 \, dx$$
$$= \pi \int_0^1 3\left\{1 - \frac{(x+1)^2}{4}\right\} dx$$
$$= 3\pi \left[x - \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{3}(x+1)^3\right]_0^1$$
$$= 3\pi \left[\left\{1 - \tfrac{1}{12}(1+1)^3\right\} - \left\{0 - \tfrac{1}{12}(0+1)^3\right\}\right] = \boldsymbol{\frac{5}{4}\pi}$$

☆別解 x 軸方向に $+1$ 平行移動して, $\pi \displaystyle\int_1^2 3\left(1 - \tfrac{x^2}{4}\right) dx$ するのもよい.