反射テスト　積分　不等式と面積　01

1. 　次の不等式を $y = \log x$ のグラフを用いて証明せよ.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

$\log n\,! \geqq n \log n - n + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

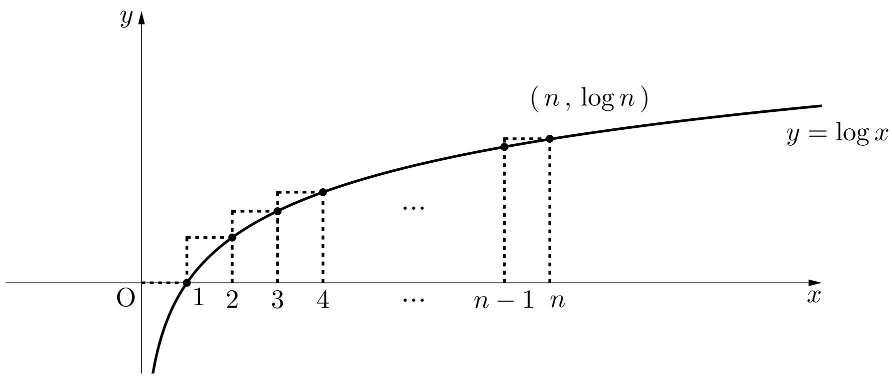
2. 次の不等式を $y = \log(1+x)$ のグラフを用いて証明せよ.（ S 級 4 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

$\log n\,! < (n+1)\log(n+1) - n \qquad (\,n = 1, 2, 3, \cdots)$

反射テスト　積分　不等式と面積　01　解答解説

1.　次の不等式を $y = \log x$ のグラフを用いて証明せよ.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

$\log n\,! \geqq n\log n - n + 1 \qquad (\,n = 1, 2, 3, \cdots)$



上図から, $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対して,

$$\begin{aligned}
\log n\,! &= \log\{\,n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1\,\} \\
&= \log n + \log(n-1) + \log(n-2) + \log(n-3) + \cdots + \log 3 + \log 2 + \log 1 \quad \text{←☆上図の点線長方形の和} \\
&> \int_1^n \log x\,dx \\
&= [\,x\log x - x]_1^n \\
&= n\log n - n - (1\log 1 - 1) \\
&= n\log n - n + 1
\end{aligned}$$

$\therefore \quad \log n\,! > n\log n - n + 1 \qquad (\,n = 2, 3, 4, \cdots)$

$n = 1$ のとき,

左辺 $= \log 1 = 0$

右辺 $= 1\log 1 - 1 + 1 = 0$

よって,

$\log n\,! \geqq n\log n - n + 1 \qquad (\,n = 1, 2, 3, 4, \cdots)$

☆どこからどこまでの積分値と比べるか.

長方形の数は n 個である.

x 座標	0〜1	1〜2	2〜3	$\cdots$	$(n-1)$〜n
長方形 (番目)	1	2	3	$\cdots$	n
長方形の面積	$\log 1 = 0$	$\log 2$	$\log 3$	$\cdots$	$\log n$

長方形の和は, $y = \log x$ と x 軸で囲まれた部分 ($x = 1$ から $x = n$ まで) の面積よりも大きい.

☆原理は区分求積法に似ている.

★ 区分求積法

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

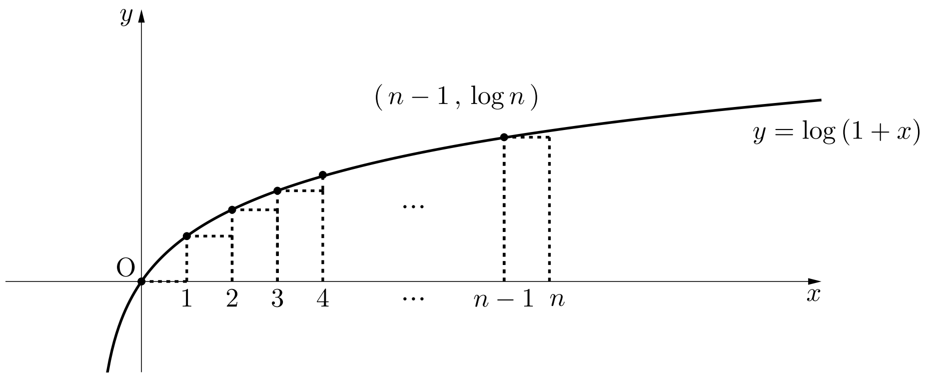
★ スターリングの近似

$\log n\,! = n\log n - n + O(\log n)$

$n\,! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

2. 次の不等式を $y=\log(1+x)$ のグラフを用いて証明せよ.（ S 級 4 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

$\log n! < (n+1)\log(n+1) - n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$



上図から, $n=1,2,3,\cdots$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\log n! &= \log\{\, n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times 3\times 2\times 1\,\}\\
&= \log n+\log(n-1)+\log(n-2)+\log(n-3)+\cdots+\log 3+\log 2+\log 1 \quad \text{←☆上図の点線長方形の面積の和}\\
&< \int_0^n \log(1+x)\,dx\\
&= [\,(1+x)\log(1+x)-(1+x)]_0^n\\
&= (1+n)\log(1+n)-(1+n)-\{(1+0)\log(1+0)-(1+0)\}\\
&= (1+n)\log(1+n)-n
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad \log n! < (n+1)\log(n+1) - n \qquad (n=1,2,3,\cdots)$

☆どこからどこまでの積分値と比べるか.

前問との違いに注意. 対数の引数 $(1+x)$ を考慮するが, 長方形の数は n 個である.

x 座標	0〜1	1〜2	2〜3	⋯	$(n-1)$〜n
長方形 (番目)	1	2	3	⋯	n
長方形の面積	$\log 1=0$	$\log 2$	$\log 3$	⋯	$\log n$

長方形の和は, $y=\log(1+x)$ と x 軸で囲まれた部分 ($x=0$ から $x=n$ まで) の面積よりも小さい.