# 反射テスト　積分　区分求積法　01

**1.** 区分求積法を用いて，次の計算をせよ．( $S$ 級 1 分，$A$ 級 2 分，$B$ 級 3 分 20 秒，$C$ 級 5 分 )

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}+1\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

**2.** 区分求積法を用いて, 次の計算をせよ.（ $S$ 級 3 分, $A$ 級 5 分, $B$ 級 8 分, $C$ 級 12 分 ）

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)$

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{3n}}++\frac{1}{\sqrt{4n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}\right)$

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots+n\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

# 反射テスト　積分　区分求積法　01　解答解説

**1.**　区分求積法を用いて，次の計算をせよ.（ $S$ 級 1 分，$A$ 級 2 分，$B$ 級 3 分 20 秒，$C$ 級 5 分 ）

★ 区分求積法

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx}\qquad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx}$$

（1）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}+1\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}$$

$$=\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\qquad\cdots\text{答え}$$

☆別解　これは区分求積法を使わなくてもできる.

与式 $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=\frac{1}{2}$

むしろこちらの方が自然だろうが，練習として両方のやり方を試してほしい.

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$

$$=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\boldsymbol{\frac{2}{3}}\qquad\cdots\text{答え}$$

**2.** 区分求積法を用いて，次の計算をせよ.（ $S$ 級 3 分，$A$ 級 5 分，$B$ 級 8 分，$C$ 級 12 分 ）

（1） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

$$=\int_0^1 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\quad\cdots\text{答え}$$

☆別解　これも $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ を用いて可能.

（2） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{3n}}++\frac{1}{\sqrt{4n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{\sqrt{kn}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{n}{k}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}$$

$$=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left[2\sqrt{x}\right]_0^1=\boldsymbol{2}\quad\cdots\text{答え}$$

（3） $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+2\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\cdots+n\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1 x\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\int_1^2 (t-1)\sqrt{t}\,dt\quad\leftarrow\text{☆置換}$$

$$=\int_1^2 \left(t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)dt$$

$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8\sqrt{2}}{5}-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{15}+\frac{4}{15}}\quad\cdots\text{答え}$$

☆置換　$t=1+x$ とおくと，$dt=dx$

$x=0\to x=1\quad\Leftrightarrow\quad t=1\to t=2$