反射テスト　積分　定積分　いろいろ　02

1.　次の計算をせよ.（ S 級 2 分 50 秒, A 級 4 分 20 秒, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

（1）　$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

（2）　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin x + \sin^2 x\right) dx$

（3）　$\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 8} xe^x\,dx$

（4）　$\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{36 - x^2}\,dx$

2.　次の計算をせよ．（ S 級 4 分，A 級 6 分，B 級 9 分，C 級 13 分 ）

（1）　$\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

（2）　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x+\tan^2 x\right)dx$

（3）　$\displaystyle\int_{\log 3}^{\log 9} xe^{-x}\,dx$

（4）　$\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2}\,dx$

反射テスト　積分　定積分　いろいろ　02　解答解説

1.　次の計算をせよ.（ S 級 2 分 50 秒, A 級 4 分 20 秒, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1)　$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\
&= [\log|x| - \log|x+1|]_1^2 \\
&= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) \\
&= \mathbf{2\log 2 - \log 3} \\
&= \mathbf{\log \frac{4}{3}}
\end{aligned}
$$

(2)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\sin x + \sin^2 x\right) dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\, dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\, dx \quad \text{←★偶関数の定積分} \\
&= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2x)\, dx \\
&= \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) - (0-0) \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}}
\end{aligned}
$$

(3)　$\displaystyle\int_{\log 2}^{\log 8} xe^x\, dx$

$$
\begin{aligned}
&= [x\cdot e^x]_{\log 2}^{\log 8} - \int_{\log 2}^{\log 8} (x)'\cdot e^x\, dx \quad \text{←★} \\
&= \log 8\cdot e^{\log 8} - \log 2\cdot e^{\log 2} - \int_{\log 2}^{\log 8} e^x\, dx \\
&= 8\log 2^3 - 2\log 2 - [e^x]_{\log 2}^{\log 8} \\
&= 24\log 2 - 2\log 2 - (e^{\log 8} - e^{\log 2}) \\
&= 22\log 2 - (8-2) \\
&= \mathbf{22\log 2 - 6}
\end{aligned}
$$

★部分積分

(4)　$\displaystyle\int_{-3}^{3} \sqrt{36-x^2}\, dx$

★扇形の面積で考える.
$y=\sqrt{36-x^2}$（ $-3 \leqq x \leqq 3$ ）は半径 6 の円周.

∴ 与式 = (六分円 + 三角形 × 2) の面積

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \pi\cdot 6^2\cdot\frac{1}{6} + 3\times 3\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times 2 \\
&= \boldsymbol{6\pi + 9\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

☆別解（ $x = 6\sin\theta$ で置換 ）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 2\int_0^3 \sqrt{6^2 - x^2}\, dx \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} 6|\cos\theta|\cdot 6\cos\theta\, d\theta \\
&= 2\cdot 36\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= 36\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = 6\pi + 9\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1) $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x^2-1}\,dx$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\int_2^4\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\
&= \frac{1}{2}\left[\log|x-1|-\log|x+1|\right]_2^4\\
&= \frac{1}{2}\{(\log 3-\log 5)-(\log 1-\log 3)\}\\
&= \mathbf{\log 3-\frac{1}{2}\log 5}
\end{aligned}
$$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\tan x+\tan^2 x\right)dx$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\,dx\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\,dx \quad \leftarrow\text{★偶関数の定積分}\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx \quad \leftarrow\text{☆}\\
&= 2\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&= 2\left\{\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)-(0-0)\right\}\\
&= \mathbf{2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi}
\end{aligned}
$$

☆ $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow \tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$

(3) $\displaystyle\int_{\log 3}^{\log 9} xe^{-x}\,dx$

$$
\begin{aligned}
&= \left[x\cdot(-e^{-x})\right]_{\log 3}^{\log 9}-\int_{\log 3}^{\log 9}(x)'\cdot(-e^{x})\,dx \quad \leftarrow\text{★}\\
&= -\left[xe^{-x}\right]_{\log 3}^{\log 9}+\int_{\log 3}^{\log 9}e^{-x}\,dx\\
&= -\log 9\cdot e^{-\log 9}+\log 3\cdot e^{-\log 3}+\int_{\log 3}^{\log 9}e^{-x}\,dx\\
&= -\frac{1}{9}\log 3^2+\frac{1}{3}\log 3+\left[-e^{-x}\right]_{\log 3}^{\log 9}\\
&= \frac{1}{9}\log 3-(e^{-\log 9}-e^{-\log 3})\\
&= \frac{1}{9}\log 3-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\\
&= \mathbf{\frac{1}{9}\log 3+\frac{2}{9}}
\end{aligned}
$$

★部分積分

(4) $\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\,dx$

★扇形の面積で考える.
$y=\sqrt{16-x^2}$ （ $-2\sqrt{3}\leqq x\leqq 2\sqrt{3}$ ）は半径 4 の円周.

$\therefore$ 与式 = (三分円と三角形 × 2) の面積

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= \pi\cdot 4^2\cdot\frac{1}{3}+2\times 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times 2\\
&= \mathbf{\frac{16}{3}\pi+4\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

☆別解（ $x=4\sin\theta$ で置換.）

$$
\begin{aligned}
\text{与式} &= 2\int_0^{2\sqrt{3}}\sqrt{4^2-x^2}\,dx\\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}}4|\cos\theta|\cdot 4\cos\theta\,d\theta\\
&= 2\cdot 16\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta\\
&= 16\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{16}{3}\pi+4\sqrt{3}
\end{aligned}
$$