反射テスト　積分　定積分　いろいろ　01

1.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1)　$\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$

(2)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (5x + 2\sin x)\,dx$

(3)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$

(4)　$\displaystyle\int_1^{e} x\log x\,dx$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 3 分 40 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1) $\displaystyle\int_4^{32} \frac{1}{2x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3 + x^2 + x + \cos x)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^8 x \log \frac{x}{4}\,dx$

反射テスト　積分　定積分　いろいろ　01　解答解説

1.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1)　$\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1}{x}\,dx$

$$= \left[\log|x|\right]_1^{e^2}$$

$$= \log e^2 - \log 1$$

$$= 2 - 0 = \mathbf{2}$$

(2)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (5x + 2\sin x)\,dx$

$$= \mathbf{0}$$

★奇関数の定積分

(3)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\,dx$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx \quad \leftarrow ★偶関数の定積分$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)\,dx$$

$$= \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cdot 1\right) - (0+0)$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}$$

(4)　$\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\cdot\log x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\cdot\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot(\log x)'\,dx \quad \leftarrow ★$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx \quad \leftarrow ☆$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot e^2\log e - \frac{1}{4}\cdot e^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\log 1 - \frac{1}{4}\cdot 1^2\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}}$$

★部分積分

☆ $\because\ x > 0 \Rightarrow |x| = x$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 3 分 40 秒, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1) $\displaystyle\int_4^{32} \frac{1}{2x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\log|x|\right]_4^{32}$$

$$= \frac{1}{2}(\log 32 - \log 4)$$

$$= \frac{1}{2}(5\log 2 - 2\log 2)$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}\log 2}$$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3 + x^2 + x + \cos x)\,dx$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (x^2 + \cos x)\,dx \quad \leftarrow\text{★奇関数・偶関数の定積分}$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}x^3 + \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi^3}{96} + \sqrt{2}}$$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x\,dx$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx \quad \text{★偶関数の定積分}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (0-0)$$

$$= \boldsymbol{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

(4) $\displaystyle\int_1^8 x\log\frac{x}{4}\,dx$

$$= \int_1^8 \left(\frac{1}{2}x^2\right)'\cdot\log\frac{x}{4}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\cdot\log\frac{x}{4}\right]_1^8 - \int_1^8 \frac{1}{2}x^2\cdot\left(\log\frac{x}{4}\right)'dx \quad \leftarrow\text{★}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\log\frac{x}{4}\right]_1^8 - \int_1^8 \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{x}\,dx \quad \leftarrow\text{☆}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\log\frac{x}{4}\right]_1^8 - \frac{1}{2}\int_1^8 x\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2\log\frac{x}{4} - \frac{1}{4}x^2\right]_1^8$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot 8^2\log 2 - \frac{1}{4}\cdot 8^2\right) - \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\log\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot 1^2\right)$$

$$= 32\log 2 - 16 - \left(-\log 2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \boldsymbol{33\log 2 - \frac{63}{4}}$$

★部分積分

☆ $\because\ x > 0 \Rightarrow |x| = x$