反射テスト　積分　定積分　分数関数　02　難

1.　次の定積分を計算せよ.（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

(1)　$\displaystyle\int_2^9 \frac{dx}{x^3 - x}$

(2)　$\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の定積分を計算せよ.（ S 級 5 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 14 分 ）

(1) $\displaystyle\int_4^8 \frac{dx}{x^3-4x}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+x+1}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　積分　定積分　分数関数　02　難　解答解説

1.　次の定積分を計算せよ.（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

★ 分数関数の変形①　帯分数化（ 分子の次数 ≧ 分母の次数　のとき ）

例　$\dfrac{x^3}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}=x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}$

★ 分数関数の変形②　部分分数分解〜通分の逆算

例　$\dfrac{1}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{(x+a)(x-a)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)$

★ 分数関数の変形③　分母が 2 次式で，部分分数分解できない場合

例　$\dfrac{1}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a^2\tan^2 t+a^2}=\dfrac{\cos^2 t}{a^2}$　←☆置換 $x=\tan t$

(1)　$\displaystyle\int_2^9\frac{dx}{x^3-x}$

$=\displaystyle\int_2^9\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dt$　←★ 3 つの部分分数分解

$=\dfrac{1}{2}\left[\log|x-1|-2\log|x|+\log|x+1|\right]_2^9$

$=\dfrac{1}{2}\left\{(\log 8-2\log 9+\log 10)-(\log 1-2\log 2+\log 3)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}(3\log 2-4\log 3+\log 10+2\log 2-\log 3)$

$=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}\log 2-\dfrac{5}{2}\log 3+\dfrac{1}{2}\log 10}$　**…答え**

★ 3 つの部分分数分解

$\dfrac{1}{x^3-x}=\dfrac{1}{(x-1)x(x+1)}$　と　$\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x}+\dfrac{C}{x+1}=\dfrac{Ax(x+1)+B(x-1)(x+1)+Cx(x-1)}{(x-1)x(x+1)}$

を恒等式と考えて係数比較すると,

$$\begin{cases}2\text{ 次の係数}\quad A+B+C=0\\ 1\text{ 次の係数}\quad A-C=0\\ \text{定数項}\quad -B=1\end{cases}\iff\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\ B=-1\\ C=\frac{1}{2}\end{cases}$$

(2)　$\displaystyle\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2+2x+5}$

$x^2+2x+5=(x+1)^2+4=(x+1)^2+2^2$ であるから, $2\tan\theta=x+1$ とおく.

$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$　⇔　$dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

また,　$x=-1\Leftrightarrow\theta=0$　かつ　$x=1\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{4}$

与式 $=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(2\tan\theta)^2+4}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$=\displaystyle\frac{1}{4}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$

$=\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,d\theta=\frac{1}{2}[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$　**…答え**

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の定積分を計算せよ.（ S 級 5 分, A 級 7 分, B 級 10 分, C 級 14 分 ）

(1) $\displaystyle\int_4^8 \frac{dx}{x^3-4x}$

$$= \int_4^8 \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}\right)dt \quad \leftarrow\bigstar\ 3\text{つの部分分数分解}$$

$$= \frac{1}{8}\left[\log|x-2|-2\log|x|+\log|x+2|\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{8}\{(\log 6-2\log 8+\log 10)-(\log 2-2\log 4+\log 6)\}$$

$$= \frac{1}{8}(\log 6-6\log 2+\log 10-\log 2+4\log 2-\log 6)$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{8}\log 10-\frac{3}{8}\log 2} \quad \textbf{…答え}$$

★ 3 つの部分分数分解

$$\frac{1}{x^3-4x}=\frac{1}{(x-2)x(x+2)} \quad \text{と} \quad \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x+2}=\frac{Ax(x+2)+B(x-2)(x+2)+Cx(x-2)}{(x-2)x(x+2)}$$

を恒等式と考えて係数比較すると,

$$\begin{cases} 2\text{次の係数} & A+B+C=0 \\ 1\text{次の係数} & 2A-2C=0 \\ \text{定数項} & -4B=1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A=\frac{1}{8} \\ B=-\frac{1}{4} \\ C=\frac{1}{8} \end{cases}$$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2+x+1}$

$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ であるから,

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta=x+\dfrac{1}{2}$ とおく.

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta} \quad \Leftrightarrow \quad dx=\frac{\sqrt{3}}{2\cos^2\theta}d\theta$$

また, $x=-1 \Leftrightarrow \theta=-\dfrac{\pi}{6}$ かつ $x=0 \Leftrightarrow \theta=\dfrac{\pi}{6}$

$$\text{与式}=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\right)^2+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{6}}1\,d\theta=\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}} \quad \textbf{…答え}$$

© 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）