反射テスト　積分　定積分　分数関数　01

1.　次の定積分を計算せよ.（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

(1)　$\displaystyle\int_2^6 \frac{2x^2}{2x-3}\,dx$

(2)　$\displaystyle\int_{\sqrt{12}}^{\sqrt{48}} \frac{dx}{x^2-3}$

(3)　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^2+2}$

2. 次の定積分を計算せよ.（ S 級 4 分, A 級 6 分 30 秒, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1) $\displaystyle\int_1^6 \frac{3x^2}{3x-2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{32-x^2}$

(3) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2+3}$

反射テスト　積分　定積分　分数関数　01　解答解説

1.　次の定積分を計算せよ.（ S 級 4 分, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

★ 分数関数の変形①　帯分数化（ 分子の次数 ≧ 分母の次数　のとき ）

例　$\dfrac{x^3}{x+1}=\dfrac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1}=x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}$

★ 分数関数の変形②　部分分数分解〜通分の逆算

例　$\dfrac{1}{x^2-a^2}=\dfrac{1}{(x+a)(x-a)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)$

★ 分数関数の変形③　分母が 2 次式で，部分分数分解できない場合

例　$\dfrac{1}{x^2+a^2}=\dfrac{1}{a^2\tan^2 t+a^2}=\dfrac{\cos^2 t}{a^2}$　　←☆置換 $x=\tan t$

(1)　$\displaystyle\int_2^6\frac{2x^2}{2x-3}\,dx=\int_2^6\left(x+\frac{3}{2}+\frac{\frac{9}{2}}{2x-3}\right)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\log|2x-3|\right]_2^6$

$\displaystyle=\boldsymbol{22+\frac{9}{2}\log 3}$　**…答え**

(2)　$\displaystyle\int_{\sqrt{12}}^{\sqrt{48}}\frac{dx}{x^2-3}=\int_{2\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}}\frac{1}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}\,dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2\sqrt{3}}\int_{2\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x-\sqrt{3}}-\frac{1}{x+\sqrt{3}}\right)dt$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\log|x-\sqrt{3}|-\log|x+\sqrt{3}|\right)\right]_{2\sqrt{3}}^{4\sqrt{3}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\log\frac{3}{5}-\log\frac{1}{3}\right)$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{9}{5}}$　**…答え**

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{3}}(2\log 3-\log 5)}$　**…答え**

(3)　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{x^2+2}$

$x=\sqrt{2}\tan t$ とおくと,

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}$　⇔　$dx=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}dt$

また,　$x=0\Leftrightarrow t=0$　かつ　$x=\sqrt{2}\Leftrightarrow t=\dfrac{\pi}{4}$

与式 $\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(\sqrt{2}\tan t)^2+2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}\,dt$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2 t+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$

$\displaystyle=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}1\,dt=\left[\frac{t}{\sqrt{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4\sqrt{2}}}$　**…答え**

2. 次の定積分を計算せよ.（ S 級 4 分，A 級 6 分 30 秒，B 級 9 分，C 級 13 分 ）

(1) $$\int_1^6 \frac{3x^2}{3x-2}\,dx = \int_1^6 \left(x+\frac{2}{3}+\frac{\frac{4}{3}}{3x-2}\right)dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}\log|3x-2|\right]_1^6$$

$$= \mathbf{\frac{125}{6}+\frac{16}{9}\log 2}$$ **…答え**

(2) $$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{8}} \frac{dx}{32-x^2} = \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{1}{(\sqrt{32}+x)(\sqrt{32}-x)}\,dt$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}+x}+\frac{1}{4\sqrt{2}-x}\right)dt$$

$$= \left[\frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\log|4\sqrt{2}+x|-\log|4\sqrt{2}-x|\right)\right]_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2}}\left(\log 3-\log\frac{5}{3}\right)$$

$$= \mathbf{\frac{1}{8\sqrt{2}}\log\frac{9}{5}}$$ **…答え**

$$= \mathbf{\frac{1}{8\sqrt{2}}(2\log 3-\log 5)}$$ **…答え**

(3) $$\int_1^3 \frac{dx}{x^2+3}$$

$x=\sqrt{3}\tan t$ とおくと，

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t} \quad\Leftrightarrow\quad dx=\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}dt$$

また，　$x=1 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{6}$　かつ　$x=3 \Leftrightarrow t=\frac{\pi}{3}$

$$\text{与式} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(\sqrt{3}\tan t)^2+3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2 t+1}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1\,dt = \left[\frac{t}{\sqrt{3}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \mathbf{\frac{\pi}{6\sqrt{3}}}$$ **…答え**