反射テスト　積分　定積分　置換積分法　02

1.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

（1）　$\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

（2）　$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

（1） $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

（2） $\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\,dx$

反射テスト　積分　定積分　置換積分法　02　解答解説

1.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

★ 置換積分法（定積分に置換法を用いるときは，範囲の変換も同時に行う）

① $t = g(x)$ とすると, $dt = g'(x)dx$ $\Rightarrow$ $\displaystyle \boldsymbol{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt}$ 　ただし $\alpha = g(a)$, $\beta = g(b)$

② $x = \phi(t)$ とすると, $dx = \phi'(t)dt$ $\Rightarrow$ $\displaystyle \boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt}$ 　ただし $a = \phi(\alpha)$, $b = \phi(\beta)$

（1） $\displaystyle \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-x^2}\,dx$

$\displaystyle = 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt{1-x^2}\,dx$ 　←☆ 1

$x = \sin\theta$とおくと, $\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$ $\Leftrightarrow$ $dx = \cos\theta d\theta$

また, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sin\dfrac{\pi}{4}$ 　←☆ 2

x	0	$\to$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

与式 $\displaystyle = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\,d\theta$ 　←☆ 3

$\displaystyle = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$

与式 $\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$\displaystyle = \left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle = \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right\} - \left(0 + \frac{1}{2}\sin 0\right)$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}$ 　…答え

☆ 1 　$\sqrt{1-x^2}$ は中心を原点とする「弧」を表し，偶関数

☆ 2 　$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ で探す

☆ 3 　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ であるから, $\cos\theta \geqq 0$

（2） $\displaystyle \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

$\displaystyle = 2\int_0^1 \tfrac{1}{1+x^2}\,dx$ 　←☆偶関数

$x = \tan\theta$ とおくと, $\dfrac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ $\Leftrightarrow$ $dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

また, $1 = \tan\dfrac{\pi}{4}$ 　より,

x	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

与式 $\displaystyle = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$\displaystyle = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$

与式 $\displaystyle = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$

$\displaystyle = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta$

$= 2\cdot[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\displaystyle = 2\left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$ 　…答え

2. 次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$

1(1) と同様にできるが, ここでは別解法を示そう.
$y=\sqrt{4-x^2}\quad(-2\leqq x\leqq 2)$ は半径 2 の半円を表す.
y を -2 から 2 まで積分したのものは, その面積である！
よって,
与式 $=\pi\cdot 2^2\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{2\pi}$ …答え

☆ちなみに 1(1) も同じ考え方で解くと,
4 分円 + 直角二等辺三角形 × 2 となって,
$\pi\cdot 1^2\cdot\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}\times 2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

(2) $\displaystyle\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\,dx$

$\displaystyle=2\int_{0}^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4+x^2}\,dx$ ←☆偶関数

$x=2\tan\theta$ とおくと, $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}\Leftrightarrow dx=\dfrac{2d\theta}{\cos^2\theta}$

また, $2\sqrt{3}=2\tan\theta\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$ より,

x	0	→	$2\sqrt{3}$
θ	0	→	$\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{4+4\tan^2\theta}\cdot\frac{2d\theta}{\cos^2\theta}\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{3}}1\,d\theta\\
&=[\theta]_0^{\frac{\pi}{3}}\\
&=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}\quad\text{…答え}
\end{aligned}$$