反射テスト　積分　定積分　置換積分法　01

1.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分 ）

(1)　$\displaystyle\int_2^6 x\sqrt{x-2}\,dx$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

2. 次の計算をせよ．（ S 級 1 分 50 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分 ）

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x\sqrt{x^2+3}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3}\,dx$

反射テスト　積分　定積分　置換積分法　01　解答解説

1.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 20 秒, B 級 3 分 30 秒, C 級 5 分 ）

★ 置換積分法（ 定積分に置換法を用いるときは，範囲の変換も同時に行う ）

① $t=g(x)$ とすると，$dt=g'(x)dx$　$\Rightarrow$　$\displaystyle\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(t)\,dt$　　ただし $\alpha=g(a)$ ，$\beta=g(b)$

② $x=\phi(t)$ とすると，$dx=\phi'(t)dt$　$\Rightarrow$　$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$　　ただし $a=\phi(\alpha)$ ，$b=\phi(\beta)$

(1)　$\displaystyle\int_2^6 x\sqrt{x-2}\,dx$

$t=x-2$ とおくと，$x=t+2$

このとき，$\dfrac{dt}{dx}=1$　$\Leftrightarrow$　$dx=dt$

また，　$x=2$ のとき $t=0$ ，$x=6$ のとき $t=4$

x	2	$\to$	6
t	0	$\to$	4

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_0^4 (t+2)\sqrt{t}\,dt\\
&=\int_0^4\left(t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}\right)dt\\
&=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^4\\
&=\boldsymbol{\frac{352}{15}}\quad\cdots\textbf{答え}
\end{aligned}$$

(2)　$\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

$t=x^2$ とおくと　$\dfrac{dt}{dx}=2x$　$\Leftrightarrow$　$xdx=\dfrac{1}{2}dt$

また，　$x=0$ のとき $t=0$ ，$x=1$ のとき $t=1$

x	0	$\to$	1
t	0	$\to$	1

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int_0^1 e^{x^2}\cdot x\,dx\\
&=\int_0^1 e^t\cdot\frac{1}{2}\,dt\\
&=\left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^1\\
&=\boldsymbol{\frac{e-1}{2}}\quad\cdots\textbf{答え}
\end{aligned}$$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 1 分 50 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{3} x\sqrt{x^2+3}\,dx$

☆ x は奇関数, $\sqrt{x^2+3}$ は偶関数 $\Rightarrow$ その積は奇関数

与式 $= \displaystyle\int_{1}^{3} x\sqrt{x^2+3}\,dx$

$t = x^2+3$ とおくと, $\dfrac{dt}{dx} = 2x \quad \Leftrightarrow \quad xdx = \dfrac{1}{2}dt$

また, $x = 3$ のとき $t = 12$, $x = 1$ のとき $t = 4$

x	1	→	3
t	4	→	12

与式 $= \frac{1}{2}\displaystyle\int_{4}^{12} \sqrt{t}\,dt$

$= \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_4^{12}$

$= \dfrac{1}{3}\{(\sqrt{12})^3 - (\sqrt{4})^3\}$

$= \boldsymbol{8\sqrt{3} - \dfrac{8}{3}}$ **…答え**

☆追記

$\sqrt{x^2+3}$ が偶関数であることは気づきにくい.

別にそのまま計算しても,

x	-1	→	3
t	4	→	12

となるので, 結局上と同じ計算になる.

このことからも, $\sqrt{x^2+3}$ が偶関数であることがわかる.

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 e^{x^3}\,dx$

$t = x^3$ とおくと $\dfrac{dt}{dx} = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2dx = \dfrac{1}{3}dt$

また, $x = -1$ のとき $t = -1$, $x = 1$ のとき $t = 1$

x	-1	→	1
t	-1	→	1

与式 $= \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{x^3}\cdot x^2\,dx$ ←☆

$= \displaystyle\int_{-1}^{1} e^t\cdot\dfrac{1}{3}\,dt$

$= \left[\dfrac{1}{3}e^t\right]_{-1}^{1}$

$= \boldsymbol{\dfrac{e}{3} - \dfrac{1}{3e}}$ **…答え**

☆奇関数でも偶関数でもないときはそのまま計算.