反射テスト　積分　定積分　奇関数・偶関数の定積分　01

1.　次の計算をせよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

(1)　$\displaystyle\int_{-3}^{3} x\,dx$

(2)　$\displaystyle\int_{-6}^{6} x^2\,dx$

(3)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$

(4)　$\displaystyle\int_{-2}^{2} (x+\sin x)\,dx$

(5)　$\displaystyle\int_{-2}^{4} x(x+1)(x-1)\,dx$

(6)　$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{x}-e^{-x}}\,dx$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 3 分, A 級 4 分 20 秒, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |\,x\,|\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-6}^{6} e\ \ dx$

(3) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \tan x\ \ dx$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\ \ dx$

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x\sin x\tan x)\,dx$

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin x\cos x\ \ dx$

(8) $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{2x}{x^2+1}\ \ dx$

反射テスト　積分　定積分　奇関数・偶関数の定積分　01　解答解説

1.　次の計算をせよ.（ S 級 2 分, A 級 3 分, B 級 4 分 20 秒, C 級 6 分 ）

★ 奇関数 $f(x)$ の積分　（ 奇関数とは, 原点に関して対称な関数のこと 〜 x^1 のイメージ ）

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \quad（ただし\ a \geqq 0）$$

★ 偶関数 $g(x)$ の積分　（ 偶関数とは, y 軸に関して対称な関数のこと 〜 x^2 のイメージ ）

$$\int_{-a}^{a} g(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} g(x)\,dx \quad（ただし\ a \geqq 0）$$

(1)　$\displaystyle\int_{-3}^{3} x\,dx$

$= \mathbf{0}$　**…答え**

☆ x は奇関数

(2)　$\displaystyle\int_{-6}^{6} x^2\,dx$

$= 2\displaystyle\int_{0}^{6} x^2\,dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^6$

$= \dfrac{2}{3}\left[x^3\right]_0^6 = \dfrac{2}{3}(6^3 - 0^3) = \mathbf{144}$　**…答え**

☆ x^2 は偶関数

(3)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$

$= 2\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$

$= 2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sin\frac{\pi}{3}$

$= 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$　**…答え**

☆ $\cos x$ は偶関数

(4)　$\displaystyle\int_{-2}^{2} (x + \sin x)\,dx$

$= \mathbf{0}$　**…答え**

☆奇関数 + 奇関数 = 奇関数
（ x も $\sin x$ も奇関数)

☆こう考えるほうが自然かもしれない.
与式 $= \displaystyle\int_{-2}^{2} x\,dx + \int_{-2}^{2} \sin x\,dx = 0$

(5)　$\displaystyle\int_{-2}^{4} x(x+1)(x-1)\,dx$

$= \displaystyle\int_{-2}^{4} (x^3 - x)\,dx$　←奇関数

$= \displaystyle\int_{-2}^{2} (x^3 - x)\,dx + \int_{2}^{4} (x^3 - x)\,dx$

$= 0 + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_2^4$

$= \left(\frac{1}{4}4^4 - \frac{1}{2}4^2\right) - \left(\frac{1}{4}2^4 - \frac{1}{2}2^2\right)$

$= (64 - 8) - (4 - 2)$

$= 56 - 2 = \mathbf{54}$　**…答え**

☆とても便利な計算方法であるから必ず使えるようにすること.

(6)　$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^x - e^{-x}}\,dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{e^x-e^{-x}}\,dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{1} (e^x + e^{-x})\,dx$

$= 2\displaystyle\int_{0}^{1} (e^x + e^{-x})\,dx$　←☆偶関数

$= 2\left[e^x - e^{-x}\right]_0^1$

$= 2\{(e - e^{-1}) - (e^0 - e^0)\}$

$= 2\left(e - \dfrac{1}{e}\right) = \boldsymbol{2e - \dfrac{2}{e}}$　**…答え**

☆ $y = e^x$ と $y = e^{-x}$ は y 軸で線対称であるから,
これらの和の $e^x + e^{-x}$ は偶関数となる.

2. 次の計算をせよ.（ S 級 3 分, A 級 4 分 20 秒, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |\,x\,|\,dx$

$\displaystyle = 2\int_{0}^{1} |\,x\,|\,dx \quad \leftarrow☆1$

$\displaystyle = 2\int_{0}^{1} x\,dx \quad \leftarrow☆2$

$\displaystyle = 2\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \mathbf{1}$ **…答え**

☆1　$|$ 奇関数 $|$ は偶関数

☆2　$0 \leqq x \leqq 1 \quad \Rightarrow \quad |x| = x$

(2) $\displaystyle\int_{-6}^{6} e\,dx$

$\displaystyle = 2\int_{0}^{6} e\,dx \quad \leftarrow☆$

$= 2\cdot(6-0)\cdot e = \boldsymbol{12e}$ **…答え**

☆定数は偶関数

☆定数の積分は, $\displaystyle\int_a^b c\,dx = (a-b)c$

実際にやってみれば確かめられる.

(3) $\displaystyle\int_{-5}^{5} \tan x \ \ dx$

$= \mathbf{0}$ **…答え**

☆ $\tan x$ は奇関数

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{3} \ \ dx$

$\displaystyle = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\tfrac{x}{3}\,dx$

$= 2\left[3\sin\frac{x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\left[\sin\frac{x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle = 6\left(\sin\frac{\pi}{6} - \sin 0\right) = 6\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{3}$ **…答え**

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$\displaystyle = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$

$= 2\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= 2\left(\tan\frac{\pi}{6} - \tan 0\right)$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$ **…答え**

(6) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (x\sin x\tan x)\,dx$

$= \mathbf{0}$ **…答え**

☆奇関数・奇関数・奇関数 = 奇関数

(x , $\sin x$, $\tan x$ 全て奇関数)

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin x\cos x \ \ dx$

$\displaystyle = \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$\displaystyle = \tfrac{1}{2}\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx \quad \leftarrow$奇関数

$\displaystyle = \tfrac{1}{2}\int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} \sin 2x\,dx + \tfrac{1}{2}\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \sin 2x\,dx$

$= 0 + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$

$= -\frac{1}{4}\left(\cos 2\pi - \cos\frac{2}{3}\pi\right)$

$\displaystyle = -\frac{1}{4}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = \boldsymbol{-\frac{3}{8}}$ **…答え**

(8) $\displaystyle\int_{-3}^{1} \frac{2x}{x^2+1} \ \ dx$

$\displaystyle = \int_{-3}^{-1} \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$

$\displaystyle = \int_{-3}^{-1} \frac{2x}{x^2+1}\,dx + 0 \quad \leftarrow☆$

$\displaystyle = \int_{-3}^{-1} \tfrac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx$

$= \left[\log(x^2+1)\right]_{-3}^{-1}$

$= \log 2 - \log 10$

$\displaystyle = \log\frac{1}{5} = \boldsymbol{-\log 5}$ **…答え**

☆ $\frac{\text{奇関数}}{\text{偶関数}}$ は奇関数