反射テスト　積分　定積分　基礎　01

1. 次の計算をせよ.（ S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分 ）

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_e^e (\log x^2)^3\,dx$

(3) $\displaystyle\int_3^e \pi^x\,dx + \int_e^3 \pi^x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \cos x\,dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_9^0 \sqrt{x}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$

ただし, $f(x) = \begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ x^2 & (1 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 3 分, A 級 4 分 20 秒, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{\pi}^{\pi} e^{\cos x}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2} e^x \sin x\,dx + \int_{2}^{-1} e^x \sin x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx + \int_2^e \log x\,dx$

(5) $\displaystyle\int_3^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{1} f(x)\,dx$

ただし, $f(x) = \begin{cases} \tan x & (x \leqq 0) \\ e^x - 1 & (0 \leqq x) \end{cases}$

反射テスト　積分　定積分　基礎　01　解答解説

1.　次の計算をせよ.（S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分）

★ 定積分　$\displaystyle\boldsymbol{\int_a^b f(x)\,dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$　　ただし $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数

★ 定積分の性質
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{a}} f(x)\,dx = F(a) - F(a) = \boldsymbol{0} \\ \displaystyle\int_{\boldsymbol{b}}^{\boldsymbol{a}} f(x)\,dx = F(a) - F(b) = -\{F(b) - F(a)\} = \boldsymbol{-}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x)\,dx \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\boldsymbol{c}} f(x)\,dx \boldsymbol{+} \int_{\boldsymbol{c}}^b f(x)\,dx \end{cases}$$

(1)　$\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

$= [\log|x|]_1^e$
$= \log e - \log 1$
$= 1 - 0$

$= \mathbf{1}$　**…答え**

(2)　$\displaystyle\int_e^e (\log x^2)^3\,dx$

$= \mathbf{0}$　**…答え**

(3)　$\displaystyle\int_3^e \pi^x\,dx + \int_e^3 \pi^x\,dx$

$\displaystyle= \int_3^e \pi^x\,dx - \int_3^e \pi^x\,dx$

$= \mathbf{0}$　**…答え**

(4)　$\displaystyle\int_0^1 \cos x\,dx + \int_1^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$

$\displaystyle= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$
$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$

$= \mathbf{1}$　**…答え**

(5)　$\displaystyle\int_9^0 \sqrt{x}\,dx$

$\displaystyle= -\int_0^9 \sqrt{x}\,dx$
$\displaystyle= -\int_0^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx$
$= -\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9$
$= -\frac{2}{3}\left(9^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right)$
$= -\frac{2}{3}\cdot(27 - 0)$

$= \mathbf{-18}$　**…答え**

☆別にそのままりしてもかまわない.
そのほうが早く正確にできるかもしれない.

(6)　$\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$

ただし, $f(x) = \begin{cases} x & (0 \leqq x \leqq 1) \\ x^2 & (1 \leqq x \leqq 4) \end{cases}$

与式 $\displaystyle= \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx$
$\displaystyle= \int_0^1 x\,dx + \int_1^4 x^2\,dx$
$= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4$
$= \frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1 + \frac{1}{3}\left[x^3\right]_1^4$
$= \frac{1}{2}(1 - 0) + \frac{1}{3}(4^3 - 1^3)$

$= \frac{1}{2} + 21 = \boldsymbol{\frac{43}{2}}$　**…答え**

2. 次の計算をせよ.（ S 級 3 分, A 級 4 分 20 秒, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$= [-\cos x]_0^{\pi}$
$= -[\cos x]_0^{\pi}$
$= -(\cos\pi - \cos 0)$
$= -(-1-1)$

$= \mathbf{2}$ **…答え**

(2) $\displaystyle\int_{\pi}^{\pi} e^{\cos x}\,dx$

$= \mathbf{0}$ **…答え**

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{2} e^x \sin x\,dx + \int_{2}^{-1} e^x \sin x\,dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{2} e^x \sin x\,dx - \int_{-1}^{2} e^x \sin x\,dx$

$= \mathbf{0}$ **…答え**

(4) $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx + \int_2^e \log x\,dx$

$= \displaystyle\int_1^e \log x\,dx$
$= [x\log x - x]_1^e$
$= (e\log e - e) - (1\log 1 - 1)$
$= (e-e) - (0-1)$

$= \mathbf{1}$ **…答え**

(5) $\displaystyle\int_3^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

$= -\displaystyle\int_1^3 \tfrac{1}{x^2}\,dx$
$= -\displaystyle\int_1^3 x^{-2}\,dx$
$= -\left[-1x^{-1}\right]_1^3$
$= \left[\frac{1}{x}\right]_1^3 = \frac{1}{3} - 1$

$= \mathbf{-\dfrac{2}{3}}$ **…答え**

☆別にそのまましてもかまわない.
そのほうが早く正確にできるかもしれない.

(6) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{1} f(x)\,dx$

ただし, $f(x) = \begin{cases} \tan x & (x \leqq 0) \\ e^x - 1 & (0 \leqq x) \end{cases}$

与式 $= \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx$

$= \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \tan x\,dx + \int_0^1 (e^x - 1)\,dx$
$= [-\log|\cos x|]_{-\frac{\pi}{3}}^{0} + [e^x - x]_0^1$
$= -\left\{\log|\cos 0| - \log\left|\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right|\right\} + (e^1 - 1) - (e^0 - 0)$
$= -\left(\log 1 - \log\frac{1}{2}\right) + e - 1 - 1$
$= -\left(0 - \log 2^{-1}\right) + e - 2$

$= \mathbf{-\log 2 + e - 2}$ **…答え**