反射テスト　積分　不定積分　三角関数いろいろ　01

1. 　次の不定積分を計算せよ．ただし積分定数は C を用いること．(S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

($x=\sin\theta$ かつ $\cos x \geqq 0$ として置換積分せよ．
また，答えは θ の関数で表すこと．)

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$

($x=\tan\theta$ として置換積分せよ．
また，答えは θ の関数で表すこと．)

2. 次の不定積分を計算せよ．ただし積分定数はCを用いること．（ S 級 2 分 30 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 9 分 ）

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int (1+\tan x)^2\,dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

（ $x=2\sin\theta$ かつ $\cos x \geqq 0$ として置換積分せよ．
また，答えは θ の関数で表すこと．）

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$

（ $x=3\tan\theta$ として置換積分せよ．
また，答えは θ の関数で表すこと．）

反射テスト　積分　不定積分　三角関数いろいろ　01　解答解説

1.　次の不定積分を計算せよ．ただし積分定数は C を用いること．(S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分)

★ 三角関数の不定積分

$$\begin{cases} \displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C \\ \displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C \end{cases} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C \\ \displaystyle\int \frac{1}{\tan x}\,dx = \log|\sin x| + C \end{cases} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \\ \displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C \end{cases}$$

★三角関数の公式を用いて，積分できる形に変形する．

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$　　　$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$

他に，倍角，積の公式など．忘れているものがあればチェックしておくこと．

(1)　$\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

$= -\dfrac{1}{\tan x} + C$　**…答え**

☆公式　$\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$　と対で覚えよう．

☆確かめ

$\left(-\frac{1}{\tan x}\right)' = -\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\frac{(\cos x)'\sin x - \cos x(\sin x)'}{\sin^2 x}$

$= -\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$

(2)　$\displaystyle\int \tan^2 x\,dx$

$= \displaystyle\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$　←☆

$= \tan x - x + C$　**…答え**

☆　$\tan^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

⇔　$\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$

☆ tan の 2 次式を積分して，1 次式がでてくる点に注目．

(3)　$\displaystyle\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$

($x = \sin\theta$ かつ $\cos x \geqq 0$ として置換積分せよ．

また，答えは θ の関数で表すこと．)

☆この形は $x = \sin\theta$ とおいて置換積分する．

$\dfrac{dx}{d\theta} = \cos\theta$　⇔　$dx = \cos\theta d\theta$

与式 $= \displaystyle\int \sqrt{1 - \sin^2\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$

$= \displaystyle\int \cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta$　←☆

$= \displaystyle\int \cos^2\theta\,d\theta$

$= \displaystyle\int \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\,d\theta$

$= \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (1 + \cos 2\theta)\,d\theta$

$= \dfrac{1}{2}\left(\theta + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right) + C$

$= \dfrac{1}{2}\theta + \dfrac{1}{4}\sin 2\theta + C$　**…答え**

☆ $\cos > 0$ より，$\sqrt{1 - \sin^2\theta} = |\cos x| = \cos x$

(4)　$\displaystyle\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx$

($x = \tan\theta$ として置換積分せよ．

また，答えは θ の関数で表すこと．)

☆この形は $x = \tan\theta$ とおいて置換積分する．

$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$　⇔　$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

与式 $= \displaystyle\int \frac{1}{1 + \tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$= \displaystyle\int \left(\frac{1}{\frac{1}{\cos^2\theta}}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta$

$= \displaystyle\int \left(\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right) d\theta$

$= \displaystyle\int 1\,d\theta$

$= \theta + C$　**…答え**

2. 次の不定積分を計算せよ．ただし積分定数は C を用いること．（ S 級 2 分 30 秒，A 級 4 分，B 級 6 分，C 級 9 分 ）

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{1}{1-\cos^2 x}\,dx$

$\displaystyle = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx$

$\displaystyle = \boldsymbol{-\frac{1}{\tan x} + C}$ **…答え**

(2) $\displaystyle\int (1+\tan x)^2\,dx$

$\displaystyle = \int (1+2\tan x+\tan^2 x)\,dx$

$\displaystyle = \int (2\tan x+1+\tan^2 x)\,dx$

$\displaystyle = \int \left(2\tan x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$ ←☆

$= 2\,(-\log|\cos x|)+\tan x+C$

$= \boldsymbol{-2\log|\cos x|+\tan x+C}$ **…答え**

☆ $\displaystyle \tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

（ $x=2\sin\theta$ かつ $\cos x \geqq 0$ として置換積分せよ．
また，答えは θ の関数で表すこと．）

$\displaystyle \frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad dx = 2\cos\theta d\theta$

与式 $\displaystyle = \int \sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle = \int 2\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$\displaystyle = 4\int \cos^2\theta\,d\theta$

$\displaystyle = 4\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$

$\displaystyle = 2\int (1+\cos 2\theta)\,d\theta$

$\displaystyle = 2\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)+C$

$= \boldsymbol{2\theta+\sin 2\theta+C}$ **…答え**

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2}\,dx$

（ $x=3\tan\theta$ として置換積分せよ．
また，答えは θ の関数で表すこと．）

$\displaystyle \frac{dx}{d\theta} = \frac{3}{\cos^2\theta} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{3d\theta}{\cos^2\theta}$

与式 $\displaystyle = \int \frac{1}{9+9\tan^2\theta}\cdot\frac{3d\theta}{\cos^2\theta}$

$\displaystyle = \frac{1}{9}\cdot 3\int \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\int \left(\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$

$\displaystyle = \boldsymbol{\frac{1}{3}\theta+C}$ **…答え**