反射テスト　積分　不定積分　分数関数　02

1.　次の不定積分を計算せよ．ただし積分定数は C を用いること．（ S 級 3 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

(1)　$\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

(2)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

2. 次の不定積分を計算せよ．ただし積分定数は C を用いること．(S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分)

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

反射テスト　積分　不定積分　分数関数　02　解答解説

1.　次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 3 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 12 分)

★ 分数関数の変形①　帯分数化 (分子の次数 ≧ 分母の次数　のとき)

例　$\dfrac{x^3}{x+1} = \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1} = x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}$

★ 分数関数の変形②　部分分数分解〜通分の逆算

例　$\dfrac{1}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{(x+a)(x-a)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x+a}\right)$

(1)　$\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+1}$

$t=e^x$ おくと,

$\dfrac{dt}{dx}=e^x \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{dt}{dx}=t \quad\Leftrightarrow\quad dx=\dfrac{dt}{t}$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{1}{t+1}\cdot\frac{1}{t}\,dt \\
&= \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \log|t|-\log|t+1|+C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \log|e^x|-\log|e^x+1|+C \\
&= \log e^x-\log(e^x+1)+C \quad \cdots ① \\
&= \boldsymbol{x-\log(e^x+1)+C} \quad \textbf{…答え}
\end{aligned}$$

☆ ①から次のように変形してもよい.

与式 $= \boldsymbol{\log\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)+C}$　**…別解**

(2)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$

$$\begin{aligned}
&= \int\frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx \\
&= \int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx
\end{aligned}$$

$t=\sin x$ とおくと,　$\dfrac{dt}{dx}=\cos x \quad\Leftrightarrow\quad \cos dx=dt$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int\tfrac{1}{1-t^2}\,dt \\
&= \int\frac{1}{(1+t)(1-t)}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\log|1+t|+\frac{1}{-1}\log|1-t|\right)+C \quad \leftarrow☆1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\log|1+t|-\log|1-t|\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+C \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+C} \quad \textbf{…答え} \quad \leftarrow☆2
\end{aligned}$$

☆1　$f(x)$ の原始関数が $F(x)$ であるとき,

$\displaystyle\int f(1-x)\,dx = -F(1-x)$　である.

$1-x$ において, x の係数が -1 であることに注意.

☆2　絶対値が何故とれるか.

$-1 \leqq \pm\sin x \leqq 1$

$\Leftrightarrow\quad 0 \leqq 1\pm\sin x \leqq 2 \quad\cdots①$

題意から, $\cos x \neq 0$ より,

$\sin x \neq \pm1$ であるから, ①の等号もない.

ゆえに $\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x} > 0$ である.

2.　次の不定積分を計算せよ．ただし積分定数はCを用いること．(S級3分，A級5分，B級7分，C級10分)

(1)　$\displaystyle\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

$$= \int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$$

$t = e^x$ おくと，

$$\frac{dt}{dx} = e^x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dt}{dx} = t \quad\Leftrightarrow\quad dx = \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{t}{t^2-1}\cdot\frac{1}{t}\,dt \\
&= \int \frac{1}{t^2-1}\,dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{1}{(t+1)(t-1)}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\log|t-1| - \log|t+1|\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left|\frac{e^x-1}{e^x+1}\right| + C} \quad \cdots\textbf{答え}
\end{aligned}$$

(2)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx
\end{aligned}$$

$t = \cos x$ とおくと，　$\dfrac{dt}{dx} = -\sin x \quad\Leftrightarrow\quad \sin dx = -dt$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{-1}{1-t^2}\,dt \\
&= \int \frac{1}{t^2-1}\,dt \\
&= \int \frac{1}{(t+1)(t-1)}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\log|t-1| - \log|t+1|\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C} \quad \cdots\textbf{答え} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C} \quad \cdots\textbf{答え} \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{(1-2\sin^2\frac{x}{2})-1}{(2\cos^2\frac{x}{2}-1)+1}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\tan^2\frac{x}{2}\right| + C \\
&= \boldsymbol{\log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C} \quad \cdots\textbf{答え}
\end{aligned}$$

☆別解

$\displaystyle\text{与式} = \int\frac{-1}{1-t^2}\,dt = -\int\frac{1}{1-t^2}\,dt$

として変形した場合，答えは，

$$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) + C} \quad \cdots\textbf{別解}$$

となるだろう．これも解答として適当である．

何故等しいか考えてみよう．