

反射テスト 積分 不定積分 分数関数 01

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

(1)
$$\int \frac{2x^3}{2x-1} dx$$

(2)
$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$$

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

(1)
$$\int \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$$

(2)
$$\int \frac{x+1}{2x^2-3x-2} dx$$

反射テスト 積分 不定積分 分数関数 01 解答解説

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 2 分, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分)

★ 分数関数の変形① 帯分数化 (分子の次数 \geq 分母の次数 のとき)

$$\text{例 } \frac{x^3}{x+1} = \frac{(x+1)(x^2-x+1)-1}{x+1} = x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1}$$

★ 分数関数の変形② 部分分数分解～通分の逆算

$$\text{例 } \frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x+a)(x-a)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right)$$

$$(1) \int \frac{2x^3}{2x-1} dx$$

$$= \int \left\{ x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2x-1)} \right\} dx \quad \leftarrow \star$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \log |2x-1| + C$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \log |2x-1| + C \quad \dots \text{答え}$$

☆ 帯分数化 分子の次数 \geq 分母の次数のとき, 整式の除法によって (必要とあれば筆算を用いて) 式を変形する.

$$(2) \int \frac{dx}{x^2+x-2}$$

$$= \int \frac{1}{(x+2)(x-1)} dx$$

$$= \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} (\log |x-1| - \log |x+2|) + C$$

$$= \frac{1}{3} \log \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \quad \dots \text{答え}$$

2. 次の不定積分を計算せよ。ただし積分定数は C を用いること。(S級3分, A級5分, B級7分, C級10分)

$$(1) \int \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx$$

$$= \int \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} dx$$

$$= \int \left(1 + \frac{2x}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \int 1 dx + \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx$$

$$= x + \log|x^2+1| + C$$

$$= x + \log(x^2+1) + C \quad \dots\text{答え}$$

$$(2) \int \frac{x+1}{2x^2-3x-2} dx$$

$$= \int \frac{x+1}{(x-2)(2x+1)} dx$$

$$\frac{x+1}{(x-2)(2x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{2x+1} \text{ とおく.}$$

$$\text{右辺を通分すると 右辺} = \frac{A(2x+1) + B(x-2)}{(x-2)(2x+1)} = \frac{(2A+B)x + (A-2B)}{(x-2)(2x+1)}$$

★恒等式として, A と B を求める.

$$2A+B=1 \text{ かつ } A-2B=1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{3}{5}, B = -\frac{1}{5}$$

$$\text{与式} = \int \frac{x+1}{(x-2)(2x+1)} dx$$

$$= \int \left(\frac{\frac{3}{5}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{5}}{2x+1} \right) dx$$

$$= \frac{3}{5} \log|x-2| - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \log|2x+1| + C$$

$$= \frac{1}{10} (6 \log|x-2| - \log|2x+1|) + C$$

$$= \frac{1}{10} \log \frac{(x-2)^6}{|2x+1|} + C \quad \dots\text{答え}$$