反射テスト　積分　置換積分法　02

1.　次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること.（ S 級 1 分 20 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1)　$\displaystyle\int \sin^3 x \cos x \, dx$

(2)　$\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1} \, dx$

2. 次の不定積分を計算せよ．ただし積分定数は C を用いること．(S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 50 秒, B 級 4 分 40 秒, C 級 7 分)

(1) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin x \, dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x + 1} \, dx$

反射テスト　積分　置換積分法　02　解答解説

1.　次の不定積分を計算せよ．ただし積分定数は C を用いること．(S 級 1 分 20 秒，A 級 2 分 40 秒，B 級 4 分，C 級 6 分)

★ 置換積分法

① $t=g(x)$ とすると，$dt=g'(x)dx$
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx=\int f(t)\,dt$$

② $x=\phi(t)$ とすると，$dx=\phi'(t)dt$
$$\int f(x)\,dx=\int f(\phi(t))\phi'(t)\,dt$$

☆何を t とおくかが鍵になる．いろいろな問題を通して，その勘を養おう．

(1)　$\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,dx$

$t=\sin x$ とおくと，

$$\frac{dt}{dx}=\cos x \quad\Leftrightarrow\quad \cos x\,dx=dt$$

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int t^3\,dt\\
&=\frac{1}{4}t^4+C\\
&=\boldsymbol{\frac{1}{4}\sin^4 x+C}
\end{aligned}$$
…答え

★① $\displaystyle\int \cos^n x\sin x\,dx=-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x+C$

★② $\displaystyle\int \sin^n x\cos x\,dx=\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x+C$

☆ ①は $t=\cos x$ ，②は $t=\sin x$ とおいて，置換積分法を用いれば確かめることができる．公式として覚えてほしい．

(2)　$\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx$

$t=e^x$ おくと，

$$\frac{dt}{dx}=e^x \quad\Leftrightarrow\quad \frac{dt}{dx}=t \quad\Leftrightarrow\quad dx=\frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\int \frac{t^2}{t+1}\cdot\frac{dt}{t}\\
&=\int \frac{t}{t+1}\,dt\\
&=\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt\\
&=t-\log|t+1|+C\\
&=\boldsymbol{e^x-\log\left(e^x+1\right)+C}
\end{aligned}$$
…答え

☆別解

$t=e^x+1$ とおいても可能．その場合最後の式が，

$e^x+1-\log\left(e^x+1\right)+C_1$

となるが，$1+C_1=C$ として，答えと同じ式になる．

2. 次の不定積分を計算せよ．ただし積分定数はCを用いること．(S 級 1 分 40 秒，A 級 2 分 50 秒，B 級 4 分 40 秒，C 級 7 分)

(1) $\displaystyle\int \cos^4 x \sin x \, dx$

$t=\cos x$ とおくと，

$$\frac{dt}{dx}=-\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\,dx=-dt$$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int t^4 \cdot (-1)\,dt \\
&= -\frac{1}{5}t^5+C \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{5}\cos^5 x + C} \quad \textbf{…答え}
\end{aligned}$$

★① $\displaystyle\int \cos^n x \sin x\,dx = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}x + C$

★② $\displaystyle\int \sin^n x \cos x\,dx = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}x + C$

☆ ①は $t=\cos x$ ，②は $t=\sin x$ とおいて，置換積分法を用いれば確かめることができる．公式として覚えてほしい．

(2) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x+1}\,dx$

$t=e^x$ おくと，

$$\frac{dt}{dx}=e^x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dt}{dx}=t \quad \Leftrightarrow \quad dx=\frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned}
\text{与式} &= \int \frac{t^3}{t+1}\cdot\frac{dt}{t} \\
&= \int \frac{t^2}{t+1}\,dt \\
&= \int \left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt \\
&= \frac{1}{2}t^2-t+\log|t+1|+C \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{2x}-e^x+\log(e^x+1)+C} \quad \textbf{…答え}
\end{aligned}$$