

反射テスト 積分 置換積分法 01

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1)
$$\int x\sqrt{x+4} dx$$

(2)
$$\int xe^{x^2} dx$$

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 20 秒)

(1)
$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx$$

(2)
$$\int x \sin x^2 dx$$

反射テスト 積分 置換積分法 01 解答解説

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

★ 置換積分法

① $t = g(x)$ とすると, $dt = g'(x)dx$

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(t) dt$$

② $x = \phi(t)$ とすると, $dx = \phi'(t)dt$

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t))\phi'(t) dt$$

☆何を t とおくかが鍵になる. いろいろな問題を通して, その勘を養おう.

(1) $\int x\sqrt{x+4} dx$

$t = x + 4$ とおくと, $x = t - 4$

また, $\frac{dt}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = dt$

与式 = $\int (t - 4)\sqrt{t} dt$

$$= \int (t^{\frac{3}{2}} - 4t^{\frac{1}{2}}) dt$$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - 4 \cdot \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}(x+4)^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} + C \quad \dots\text{答え}$$

☆ $\sqrt{\quad}$ の中の多項式を t とおく.

(2) $\int xe^{x^2} dx$

$t = x^2$ とおくと,

$$\frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$$

与式 = $\int e^{x^2} \cdot x dx$

$$= \int e^t \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2}e^t + C$$

$$= \frac{1}{2}e^{x^2} + C \quad \dots\text{答え}$$

☆ t とおけば積分できるものを探す. 引数を t とおく. (引数とは, ここでは関数 e^x の x の部分のこと)

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 2 分 10 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 20 秒)

$$(1) \int \frac{x}{\sqrt{2x-3}} dx$$

$$t = 2x - 3 \text{ とおくと, } x = \frac{t+3}{2}$$

$$\text{また, } \frac{dt}{dx} = 2 \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\text{与式} = \int \frac{\frac{t+3}{2}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{t+3}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \frac{1}{4} \int \left(\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}} \right) dt$$

$$= \frac{1}{4} \int (t^{\frac{1}{2}} + 3t^{-\frac{1}{2}}) dt$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + 3 \cdot 2t^{\frac{1}{2}} \right) + C$$

$$= \frac{1}{6} t^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \sqrt{t} + C$$

$$= \frac{1}{6} (2x-3)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2} \sqrt{2x-3} + C \quad \cdots \text{答え}$$

$$(2) \int x \sin x^2 dx$$

$$t = x^2 \text{ とおくと,}$$

$$\frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow x dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\text{与式} = \int \sin x^2 \cdot x dx$$

$$= \int \sin t \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} (-\cos t) + C$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x^2 + C \quad \cdots \text{答え}$$

☆ t とおけば積分できるものを探す. 引数を t とおく. (引数とは, ここでは関数 $\sin x$ の x の部分のこと)