

反射テスト 積分 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ の積分 01

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 45 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

(1) $\int \tan x \, dx$

(2) $\int \frac{1}{\tan x} \, dx$

(3) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} \, dx$

(4) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} \, dx$

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分)

$$(1) \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

$$(2) \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$$

$$(3) \int \frac{dx}{\cos^2 x \tan x}$$

$$(4) \int \frac{dx}{x \log x}$$

反射テスト 積分 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ の積分 01 解答解説

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 45 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 2 分 40 秒, C 級 4 分)

★ $\frac{f'(x)}{f(x)}$ の積分 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$

☆これらは置換積分法における特別な例ととらえることができるので, 全て置換積分法で解ける.

(1) $\int \tan x dx$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$= - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$$

$$= - \log |\cos x| + C \quad \dots \text{答え}$$

(2) $\int \frac{1}{\tan x} dx$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$= \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx$$

$$= \log |\sin x| + C \quad \dots \text{答え}$$

(3) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

$$= \int \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} dx$$

$$= \log |x^2 + 1| + C$$

$$= \log (x^2 + 1) + C \quad \dots \text{答え} \quad \leftarrow \star$$

☆ $x^2 \geq 0$ より, $x^2 + 1 > 0$

(4) $\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx$

$$= \int \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} dx$$

$$= \log |e^x + 1| + C$$

$$= \log (e^x + 1) + C \quad \dots \text{答え} \quad \leftarrow \star$$

☆ $e^x > 0$ より, $e^x + 1 > 0$

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 1 分 50 秒, A 級 3 分, B 級 4 分, C 級 5 分)

$$(1) \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$$

$$= \int \frac{(1 + \sin x)'}{1 + \sin x} dx$$

$$= \log |1 + \sin x| + C$$

$$= \log (1 + \sin x) + C \quad \dots \text{答え} \quad \leftarrow \star$$

☆ $-1 \leq \sin x \leq 1$ より,

$$1 + \sin x \geq 0$$

また問題から, 与式で分母が 0 になることはないので,

$$1 + \sin x \neq 0$$

$$\Rightarrow 1 + \sin x > 0$$

$$(2) \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$$

$(x^2 + 2x + 3)' = 2x + 2$ であるから,

$$\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)' = x + 1$$

$$\text{与式} = \int \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)'}{x^2 + 2x + 3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + 2x + 3)'}{x^2 + 2x + 3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \log |x^2 + 2x + 3| + C$$

$$= \frac{1}{2} \log (x^2 + 2x + 3) + C \quad \dots \text{答え} \quad \leftarrow \star$$

$$\star x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 > 0$$

$$(3) \int \frac{dx}{\cos^2 x \tan x}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x} dx$$

$$= \int \frac{(\tan x)'}{\tan x} dx$$

$$= \log |\tan x| + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(4) \int \frac{dx}{x \log x}$$

$$= \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x} dx$$

$$= \int \frac{(\log x)'}{\log x} dx$$

$$= \log |\log x| + C \quad \dots \text{答え}$$

☆応用

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\tan \frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \int \frac{(2 \tan \frac{x}{2})'}{2 \tan \frac{x}{2}} dx$$

$$= \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$