

反射テスト 積分 不定積分 指数・対数関数 01

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 1 分 45 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分)

(1) $\int e^x dx$

(2) $\int e^{-x} dx$

(3) $\int e^{2x+1} dx$

(4) $\int 3^x dx$

(5) $\int \frac{1}{9^x} dx$

(6) $\int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx$

(7) $\int \log x dx$

(8) $\int \log 2x dx$

(9) $\int \log_2 x dx$

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

(1) $\int e^{3x} dx$

(2) $\int e^{-\frac{1}{2}x} dx$

(3) $\int e^{1-x} dx$

(4) $\int 4^x dx$

(5) $\int \frac{3^x}{2^{2x}} dx$

(6) $\int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{3x}} dx$

(7) $\int \log \frac{x}{5} dx$

(8) $\int \log(4x^2) dx$

(9) $\int \log_3 9x dx$

反射テスト 積分 不定積分 指数・対数関数 01 解答解説

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 1 分 45 秒, A 級 3 分, B 級 4 分 30 秒, C 級 6 分)

☆この問題をする前に 2B 積分「1 次式の自然数乗の積分」をしっかりとできるようにしておくこと.

★ 指数関数の不定積分

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

★ 対数関数の不定積分

$$\int \log x dx = x \log x - x + C$$

☆底が e である自然対数以外の場合, つまり $\log_a x$ の積分の場合, 底の変換公式を用いる.

★ 「 m, n が定数 ($m \neq 0$) 」 かつ 「 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ である 」 とき,

$$\int f(mx + n) dx = \frac{1}{m} F(mx + n) + C$$

< 証明 > $u = mx + n$ とおいて右辺を x について微分すると, $(\text{右辺})' = \frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{m} F(u) \right\} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{m} \cdot f(u) \cdot m = f(mx + n)$

$$(1) \quad \int e^x dx = e^x + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(2) \quad \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(3) \quad \int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(4) \quad \int 3^x dx = \frac{1}{\log 3} 3^x + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(5) \quad \int \frac{1}{9^x} dx = \int \left(\frac{1}{9}\right)^x dx = \frac{1}{\log \frac{1}{9}} \left(\frac{1}{9}\right)^x + C = -\frac{1}{\log 9} \left(\frac{1}{9}\right)^x + C \quad \dots \text{答え}$$

$$= -\frac{1}{2 \log 3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(6) \quad \int \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx = \int (e^x + e^{-x}) dx = e^x - e^{-x} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(7) \quad \int \log x dx = x \log x - x + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(8) \quad \int \log 2x dx = \int (\log 2 + \log x) dx = (\log 2) \cdot x + x \log x - x + C = x(\log 2 + \log x) - x + C = x \log 2x - x + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(9) \quad \int \log_2 x dx = \int \frac{\log x}{\log 2} dx = \frac{1}{\log 2} \int \log x dx = \frac{1}{\log 2} (x \log x - x) + C \quad \dots \text{答え}$$

☆別解

$$\text{与式} = \frac{1}{2}(2x \log 2x - 2x) + C = x \log 2x - x + C$$

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分)

$$(1) \int e^{3x} dx$$

$$= \frac{1}{3} e^{3x} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(2) \int e^{-\frac{1}{2}x} dx$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + C$$

$$= -2e^{-\frac{1}{2}x} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(3) \int e^{1-x} dx$$

$$= \frac{1}{-1} \cdot e^{1-x} + C$$

$$= -e^{1-x} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(4) \int 4^x dx$$

$$= \frac{1}{\log 4} 4^x + C \quad \dots \text{答え}$$

$$= \frac{1}{2 \log 2} 2^{2x} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(5) \int \frac{3^x}{2^{2x}} dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{4}\right)^x dx$$

$$= \frac{1}{\log \frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4}\right)^x + C \quad \dots \text{答え}$$

$$= \frac{1}{\log 3 - 2 \log 2} \left(\frac{3}{4}\right)^x + C$$

$$\dots \text{答え}$$

$$(6) \int \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{3x}} dx$$

$$= \int e^{-x} - e^{-5x} dx$$

$$= \frac{1}{-1} e^{-x} - \frac{1}{-5} e^{-5x} + C$$

$$= -e^{-x} + \frac{1}{5} e^{-5x} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(7) \int \log \frac{x}{5} dx$$

$$= \int (\log x - \log 5) dx$$

$$= x \log x - x - x \log 5 + C$$

$$= x \log \frac{x}{5} - x + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(8) \int \log(4x^2) dx$$

$$= \int (\log 4 + 2 \log x) dx$$

$$= (\log 4) \cdot x + 2(x \log x - x) + C$$

$$= 2x \log 2x - 2x + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(9) \int \log_3 9x dx$$

$$= \int \frac{\log 9x}{\log 3} dx$$

$$= \frac{1}{\log 3} \int (\log 9 + \log x) dx$$

$$= \frac{1}{\log 3} (\log 9 \cdot x + x \log x - x) + C$$

$$= \frac{1}{\log 3} x (\log 9 + \log x - 1) + C$$

$$= \frac{x (\log 9x - 1)}{\log 3} + C \quad \dots \text{答え}$$

☆別解

$$\text{与式} = \frac{1}{5} \left(\frac{x}{5} \log \frac{x}{5} - \frac{x}{5} \right) + C$$

$$= 5 \left(\frac{x}{5} \log \frac{x}{5} - \frac{x}{5} \right) + C$$

$$= x \log \frac{x}{5} - x + C$$

☆別解

$$\text{与式} = \int \log(2x)^2 dx$$

$$= 2 \int \log 2x dx$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x \log 2x - 2x) + C$$

$$= 2x \log 2x - 2x + C$$

☆別解

$$\text{与式} = \frac{1}{\log 3} \cdot \frac{1}{9} (9x \log 9x - 9x) + C$$

$$= \frac{x \log 9x - x}{\log 3} + C$$

☆別解 これもよし

$$2x + \frac{x \log x - x}{\log 3} + C$$