

反射テスト 積分 不定積分 三角関数 01

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $\int \sin x \, dx$

(2) $\int \cos x \, dx$

(3) $\int \sin 3x \, dx$

(4) $\int \cos 2x \, dx$

(5) $\int \cos(5x - 3) \, dx$

(6) $\int \cos x \cos 2x \, dx$

(7) $\int \tan x \, dx$

(8) $\int (1 + \tan^2 x) \, dx$

(9) $\int \tan(4x - 7) \, dx$

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 9 分)

(1) $\int \sin(-x) dx$

(2) $\int \cos 6x dx$

(3) $\int \sin 7x dx$

(4) $\int \sin(-2x) dx$

(5) $\int \sin 3x \sin 2x dx$

(6) $\int \sin x \cos 3x dx$

(7) $\int \tan 2x dx$

(8) $\int \{1 + \tan^2(-x + 2)\} dx$

(9) $\int \tan(-5x - 2) dx$

反射テスト 積分 不定積分 三角関数 01 解答解説

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

☆この問題をする前に 2B 積分「1 次式の自然数乗の積分」をしっかりとできるようにしておくこと.

★三角関数の不定積分

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\log |\cos x| + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

★「 m, n が定数 ($m \neq 0$)」かつ「 $f(x)$ の原始関数が $F(x)$ である」とき, $\int f(mx+n) \, dx = \frac{1}{m} F(mx+n) + C$

<証明> $u = mx+n$ とおいて右辺を x について微分すると, $(\text{右辺})' = \frac{d}{du} \left\{ \frac{1}{m} F(u) \right\} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{m} \cdot f(u) \cdot m = f(mx+n)$

(1) $\int \sin x \, dx$
 $= -\cos x + C$ …答え

(2) $\int \cos x \, dx$
 $= \sin x + C$ …答え

(3) $\int \sin 3x \, dx$
 $= -\frac{1}{3} \cos 3x + C$ …答え

☆すぐに微分して確かめる癖をつけよう.

(4) $\int \cos 2x \, dx$
 $= \frac{1}{2} \sin 2x + C$ …答え

(5) $\int \cos(5x-3) \, dx$
 $= \frac{1}{5} \sin(5x-3) + C$ …答え

(6) $\int \cos x \cos 2x \, dx$
 $= \frac{1}{2} \int \{\cos(x+2x) + \cos(x-2x)\} \, dx$
 $= \frac{1}{2} \int \{\cos 3x + \cos(-x)\} \, dx$
 $= \frac{1}{2} \int (\cos 3x + \cos x) \, dx$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + \sin x \right) + C$
 $= \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{2} \sin x + C$ …答え

☆積の公式

$$\cos \alpha \cos \beta$$

$$= \frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$$

(7) $\int \tan x \, dx$
 $= -\log |\cos x| + C$ …答え

(8) $\int (1 + \tan^2 x) \, dx$
 $= \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx$
 $= \tan x + C$ …答え

(9) $\int \tan(4x-7) \, dx$
 $= -\frac{1}{4} \log |\cos(4x-7)| + C$
 …答え

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 9 分)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \int \sin(-x) dx \\
 &= \frac{1}{-1} \cdot \{-\cos(-x)\} + C \\
 &= \cos(-x) + C \\
 &= \cos x + C \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \int \cos 6x dx \\
 &= \frac{1}{6} \sin 6x + C \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \int \sin 7x dx \\
 &= \frac{1}{7} \cdot (-\cos 7x) + C \\
 &= -\frac{1}{7} \cos 7x + C \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

☆別解 (「-」を最初に外へ出す)

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= -\int \sin x dx \\
 &= \cos x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \int \sin(-2x) dx \\
 &= \frac{1}{-2} \cdot \{-\cos(-2x)\} + C \\
 &= \frac{1}{2} \cos 2x + C \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

☆別解 (「-」を最初に外へ出す)

$$\begin{aligned}
 & \int \sin(-2x) dx \\
 &= -\int \sin 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \cos 2x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \int \sin 3x \sin 2x dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int \{\cos(3x+2x) - \cos(3x-2x)\} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int (\cos 5x - \cos x) dx \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} \sin 5x - \sin x \right) + C \\
 &= -\frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{2} \sin x + C \\
 & \quad \quad \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

☆積の公式

$$\begin{aligned}
 & \sin \alpha \sin \beta \\
 &= -\frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \int \sin x \cos 3x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \{\sin(x+3x) + \sin(x-3x)\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \{\sin 4x + \sin(-2x)\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int (\sin 4x - \sin 2x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) + C \\
 &= -\frac{1}{8} \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \\
 & \quad \quad \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

☆積の公式

$$\begin{aligned}
 & \sin \alpha \cos \beta \\
 &= \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \int \tan 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (-\log |\cos 2x|) + C \\
 &= -\frac{1}{2} \log |\cos 2x| + C \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \int \{1 + \tan^2(-x+2)\} dx \\
 &= \int \frac{1}{\cos^2(-x+2)} dx \\
 &= \frac{1}{-1} \tan(-x+2) + C \\
 &= -\tan(-x+2) + C \\
 &= -\tan\{-(x-2)\} + C \\
 &= \tan(x-2) + C \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

☆最初に「-」を前に出すと,

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \int [1 + \tan^2\{-(x-2)\}] dx \\
 &= \int [1 + \{-\tan(x-2)\}^2] dx \\
 &= \int \{1 + \tan^2(x-2)\} dx \\
 &= \int \frac{1}{\cos^2(x-2)} dx \\
 &= \tan(x-2) + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (9) \quad & \int \tan(-5x-2) dx \\
 &= \frac{1}{-5} \{-\log |\cos(-5x-2)|\} + C \\
 &= \frac{1}{5} \log |\cos\{-(5x+2)\}| + C \\
 &= \frac{1}{5} \log |\cos(5x+2)| + C \\
 & \quad \quad \quad \cdots \text{答え}
 \end{aligned}$$

☆最初に「-」を前に出すと,

$$\begin{aligned}
 \text{与式} &= \int \{-\tan(5x+2)\} dx \\
 &= -\int \tan(5x+2) dx \\
 &= -\frac{1}{5} \{-\log |\cos(5x+2)|\} + C \\
 &= \frac{1}{5} \log |\cos(5x+2)| + C
 \end{aligned}$$