

反射テスト 積分 不定積分 有理数乗の式 01

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 45 秒, A 級 1 分 10 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

(1) $\int 0 dx$

(2) $\int 1 dx$

(3) $\int x dx$

(4) $\int x^2 dx$

(5) $\int x^n dx$ (n は -1 以外の定数) (6) $\int \frac{1}{x} dx$

(7) $\int \frac{dx}{x^2}$

(8) $\int \sqrt{x} dx$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

(1) $\int dx$

(2) $\int x^4 dx$

(3) $\int (x^3 + 4x^2 - 2x - 3) dx$

(4) $\int x^{n-1} dx$ (n は定数)

(5) $\int \frac{1}{x^4} dx$

(6) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3} dx$

(7) $\int \sqrt[3]{x} dx$

(8) $\int \frac{1}{4\sqrt{x}} dx$

(9) $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} dx$

反射テスト 積分 不定積分 有理数乗の式 01 解答解説

1. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 45 秒, A 級 1 分 10 秒, B 級 2 分, C 級 3 分)

$$(1) \int 0 dx$$

$$= C \quad \dots \text{答え}$$

$$(2) \int 1 dx$$

$$= x + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(3) \int x dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + C \quad \dots \text{答え}$$

☆0はいくら積み重ねても0だから, 答えは0という感覚は悪くない. しかし間違っている. 確かに原始関数は0になるが, 積分定数があることを忘れてはいけない. 迷った人は, 定数を微分したら0になることを忘れていない.

☆積分定数を忘れないこと.

$$(4) \int x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(5) \int x^n dx \quad (n \text{ は } -1 \text{ 以外の定数})$$

$$= \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(6) \int \frac{1}{x} dx$$

$$= \log|x| + C \quad \dots \text{答え}$$

☆すぐ微分して確かめる癖をつけよう.

☆注意. これだけが特別である.
(5) で $n = -1$ のときがこれである.

$$\star \int x^n dx$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C & (n \neq -1) \\ \log|x| + C & (n = -1) \end{cases}$$

$$(7) \int \frac{dx}{x^2}$$

$$= \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= \int x^{-2} dx$$

$$= \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C$$

$$= -x^{-1} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$= -\frac{1}{x} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(8) \int \sqrt{x} dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$(9) \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + C \quad \dots \text{答え}$$

$$= 2\sqrt{x} + C \quad \dots \text{答え}$$

☆書き方の問題. 1(6) の問題も, $\int \frac{dx}{x}$ と書いてもよい.

☆係数のイメージ
積分後の係数は次数の逆数である.
ここでは $\frac{2}{3}$ は次数 $\frac{3}{2}$ の逆数.

☆ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ を覚えていれば, すぐ検算できる. 確かめを癖にしよう.

☆(4)~(9) は頻出. 間違いやすい (9) は公式として覚えてしまったほうがよいだろう. 微分して確かめる癖をつけよう.

2. 次の不定積分を計算せよ. ただし積分定数は C を用いること. (S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 4 分, C 級 6 分)

$$(1) \quad \int dx$$

$$= x + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$(2) \quad \int x^4 dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$(3) \quad \int (x^3 + 4x^2 - 2x - 3) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + 4 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - x^2 - 3x + C$$

$$\cdots\text{答え}$$

☆これも書き方の問題. 1 が省略されている. これと 1 の (2) は同じ式である.

$$(4) \quad \int x^{n-1} dx \quad (n \text{ は定数})$$

$n \neq 0$ のとき,
与式 = $\frac{1}{(n-1)+1}x^n + C$

$$= \frac{1}{n}x^n + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$(5) \quad \int \frac{1}{x^4} dx$$

$$= \int x^{-4} dx$$

$$= \frac{1}{-4+1}x^{-4+1} + C$$

$$= -\frac{1}{3}x^{-3} + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$(6) \quad \int \frac{x^2+1}{x^3} dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx$$

$$= \int (x^{-1} + x^{-3}) dx$$

$$= \log|x| + \frac{1}{-3+1} \cdot x^{-3+1} + C$$

$$= \log|x| - \frac{1}{2x^2} + C \quad \cdots\text{答え}$$

$n = 0$ のとき,
与式 = $\int x^{-1} dx$

$$= \log|x| + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$= -\frac{1}{3x^3} + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$(7) \quad \int \sqrt[3]{x} dx$$

$$= \int x^{\frac{1}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}}x^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$= \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$(8) \quad \int \frac{1}{4\sqrt{x}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2} + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$(9) \quad \int \frac{x^2-1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int x^{2-\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int x^{\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} - \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + C \quad \cdots\text{答え}$$

$$= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C \quad \cdots\text{答え}$$

☆ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ より,
 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}(\sqrt{x})' = \frac{1}{4\sqrt{x}}$