反射テスト　積分　微分の逆算　01

1.　次の式を x について微分せよ.（ S 級 18 秒, A 級 25 秒, B 級 35 秒, C 級 50 秒 ）

(1)　$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$　（ n は -1 以外の実定数 ）

(2)　$\log|x|$

(3)　$-\cos x$

(4)　$\sin x$

(5)　$\dfrac{1}{n}\sin nx$　（ n は定数 ）

(6)　$-\log|\cos x|$

2. 次の式を x について微分せよ.（ S 級 40 秒, A 級 1 分, B 級 1 分 20 秒, C 級 1 分 50 秒 ）

(1) $\tan x$

(2) e^x

(3) $\dfrac{1}{\log a}a^x$ （ a は定数 ）

(4) $x\log x - x$

(5) $\dfrac{1}{\log a}(x\log x - x)$ （ a は定数 ）

(6) $\log|f(x)|$

反射テスト　積分　微分の逆算　01　解答解説

1.　次の式を x について微分せよ.（ S 級 18 秒, A 級 25 秒, B 級 35 秒, C 級 50 秒 ）

★ 積分は微分の逆算

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

与式の $\int$ は $f(x)$ を x について積分することを表す記号で，インテグラルと読む. **積分したものを微分すると必ず元に戻る.**

☆しかし，微分したものを積分して元に戻るとは限らない.

一般に $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ と書けるとき， $F(x)$ を $f(x)$ の **原始関数**, C を **積分定数** という.

積分定数 C は x についての定数を表す. この C はもう 1 つに条件がないと 1 つに決定できないため，微分してから積分しても必ず元に戻るとは限らない.

(1)　$\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$　（ n は -1 以外の実定数 ）

$$\begin{aligned}(\text{与式})' &= \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)x^{n+1-1}\\ &= \boldsymbol{x^n}\quad \cdots\textbf{答え}\end{aligned}$$

★ $\int x^n\,dx$　（使用頻度　激高）

$= \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$　ただし C は積分定数.

(2)　$\log|x|$

$(\text{与式})' = \boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$　**…答え**

★ $\int \dfrac{1}{x}\,dx$　（使用頻度　高）

$= \log|x| + C$　ただし C は積分定数.

☆絶対値記号を忘れないこと.

☆これが (1) で $n = -1$ のときである.

(3)　$-\cos x$

$$\begin{aligned}(\text{与式})' &= -(-\sin x)\\ &= \boldsymbol{\sin x}\quad \cdots\textbf{答え}\end{aligned}$$

★ $\int \sin x\,dx$　（使用頻度　高）

$= -\cos x + C$　ただし C は積分定数.

(4)　$\sin x$

$(\text{与式})' = \boldsymbol{\cos x}$　**…答え**

★ $\int \cos x\,dx$　（使用頻度　高）

$= \sin x + C$　ただし C は積分定数.

(5)　$\dfrac{1}{n}\sin nx$　（ n は定数 ）

$$\begin{aligned}(\text{与式})' &= \tfrac{1}{n}(\sin nx)'\\ &= \tfrac{1}{n}\cdot n\cos nx\\ &= \boldsymbol{\cos nx}\quad \cdots\textbf{答え}\end{aligned}$$

★ $\int \cos nx\,dx$　（使用頻度　高）

$= \dfrac{1}{n}\sin nx + C$　ただし C は積分定数.

(6)　$-\log|\cos x|$

$u = \cos x$ とおくと，

$\frac{du}{dx} = -\sin x$ より，

$$\begin{aligned}(\text{与式})' &= -\tfrac{d}{du}(\log|u|)\cdot\tfrac{du}{dx}\\ &= -\tfrac{1}{u}\cdot(-\sin x)\\ &= \tfrac{\sin x}{\cos x}\\ &= \boldsymbol{\tan x}\quad \cdots\textbf{答え}\end{aligned}$$

★ $\int \tan x\,dx$　（使用頻度　低）

$= -\log|\cos x| + C$　ただし C は積分定数.

2. 次の式を x について微分せよ.（ S 級 40 秒, A 級 1 分, B 級 1 分 20 秒, C 級 1 分 50 秒 ）

(1) $\tan x$

$$
\begin{aligned}
(\text{与式})' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \\
&= \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{\cos^2 x}} \quad \cdots \textbf{答え}
\end{aligned}
$$

★ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$ （使用頻度　低）

$= \tan x + C$ 　ただし C は積分定数.

(2) e^x

$(\text{与式})' = \boldsymbol{e^x}$ **…答え**

★ $\displaystyle\int e^x\,dx$ （使用頻度　高）

$= e^x + C$ 　ただし C は積分定数.

(3) $\dfrac{1}{\log a}a^x$ （ a は定数 ）

$$
\begin{aligned}
(\text{与式})' &= \frac{1}{\log a}(a^x)' \\
&= \frac{1}{\log a}\cdot a^x \cdot \log a \\
&= \boldsymbol{a^x} \quad \cdots \textbf{答え}
\end{aligned}
$$

★ $\displaystyle\int a^x\,dx$ （使用頻度　低）

$= \dfrac{1}{\log a}a^x + C$ 　ただし C は積分定数.

(4) $x\log x - x$

$$
\begin{aligned}
(\text{与式})' &= (x)'\log x + x(\log x)' - 1 \\
&= \log x + x\cdot\tfrac{1}{x} - 1 \\
&= \boldsymbol{\log x} \quad \cdots \textbf{答え}
\end{aligned}
$$

★ $\displaystyle\int \log x\,dx$ （使用頻度　中）

$= x\log x - x + C$ 　ただし C は積分定数.

(5) $\dfrac{1}{\log a}(x\log x - x)$ （ a は定数 ）

$$
\begin{aligned}
(\text{与式})' &= \tfrac{1}{\log a}\cdot\{(x)'\log x + x(\log x)' - 1\} \\
&= \tfrac{1}{\log a}\cdot(\log x + x\cdot\tfrac{1}{x} - 1\} \\
&= \tfrac{\log x}{\log a} \\
&= \boldsymbol{\log_a x} \quad \cdots \textbf{答え}
\end{aligned}
$$

★ $\displaystyle\int \log_a x\,dx$ （使用頻度　激低）

$= \dfrac{1}{\log a}(x\log x - x) + C$ 　ただし C は積分定数.

この公式は覚える必要がない.

必要なときは, 底の変換公式

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

を用いれば, (9) の公式が使える.

$$\int \log_a x\,dx = \int \tfrac{\log x}{\log a}\,dx = \tfrac{1}{\log a}\int \log x\,dx$$

$$= \frac{1}{\log a}(x\log x - x) + C$$

(6) $\log|f(x)|$

$u = f(x)$ とおけば, $\dfrac{du}{dx} = f'(x)$

$$
\begin{aligned}
(\text{与式})' &= \tfrac{d}{du}(\log|u|)\cdot\tfrac{du}{dx} \\
&= \tfrac{1}{u}\cdot f'(x) \\
&= \boldsymbol{\frac{f'(x)}{f(x)}} \quad \cdots \textbf{答え}
\end{aligned}
$$

★ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ （使用頻度　中）

$= \log|f(x)| + C$ 　ただし C は積分定数.

☆これは対数微分法の逆算である.