反射テスト　曲線　極方程式　02 難

1.　次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 6 分 20 秒, C 級 9 分 ）

(1)　$r = \dfrac{1}{\sqrt{2} + \cos\theta}$

(2)　$r = 2 + \cos\theta$　($0 \leqq \theta \leqq \pi$)

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 12 分 ）

(1) $r = \dfrac{1}{1 + 2\cos\theta}$

(2) $r = \sqrt{\sin 2\theta}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　曲線　極方程式　02 難　解答解説

1.　次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 6 分 20 秒, C 級 9 分 ）

★ 極方程式

xy 直交座標において, (x, y) という **変数 2 個** による **1 つの方程式** が座標平面上の **図形** を表す. 同様に極座標においても (r, θ) という **変数 2 個** による **1 つの方程式** が極座標平面上の **図形** を表す.

☆注意　$r < 0$ のときも考えるのが通例である. $r < 0$ のとき, (r, θ) は, $(|r|, \theta + \pi)$ を表す.

式の形で分類し図形を全て覚えるのもいいが, 出題頻度が低いために時間も労力ももったいない. そこで, グラフの描き方を 2 つ紹介する.

①関係式を用いる　極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の関係式を用いて, (x, y) の方程式に変換する.

$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$　　$\boldsymbol{x = r\cos\theta}$　　$\boldsymbol{y = r\sin\theta}$

②微分を用いる　$x = f(\theta), y = g(\theta)$ の形になるのであれば, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ を計算して増減表からグラフを描く.

(1)　$r = \dfrac{1}{\sqrt{2} + \cos\theta}$

$\Rightarrow$　$\sqrt{2}r + r\cos\theta = 1$

$\Leftrightarrow$　$\sqrt{2}r = 1 - x$

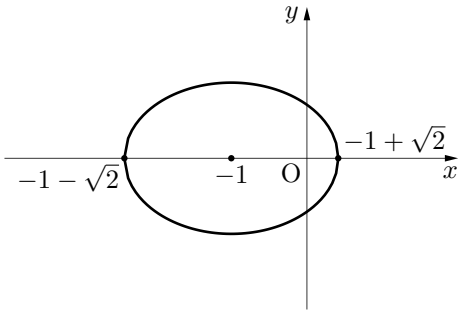
$\Rightarrow$　$(\sqrt{2}r)^2 = (1 - x)^2$

$\Leftrightarrow$　$2x^2 + 2y^2 = 1 - 2x + x^2$　…2 次曲線

$\Leftrightarrow$　$x^2 + 2x + 2y^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$　$(x + 1)^2 + 2y^2 = 2$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{\frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1}$　**…楕円**



★極方程式 $\boldsymbol{r = \frac{1}{a + b\cos\theta}}$ は **2 次曲線** を表す.

$b = 0$ のときは円を表し, それ以外のときは,

$$\begin{cases} a^2 - b^2 > 0 & \text{のとき,　楕円} \\ a^2 - b^2 = 0 & \text{のとき,　放物線} \\ a^2 - b^2 < 0 & \text{のとき,　双曲線} \end{cases}$$

$r = \frac{1}{a + b\cos\theta}$

$\Rightarrow$　$ar = 1 - br\cos\theta$

$\Leftrightarrow$　$a^2r^2 = (1 - bx)^2$

$\Leftrightarrow$　$a^2(x^2 + y^2) = (1 - bx)^2$

$\Leftrightarrow$　$(a^2 - b^2)x^2 + 2bx + a^2y^2 = 1$　… 2 次曲線

(2)　$r = 2 + \cos\theta$　($0 \leqq \theta \leqq \pi$)

< 京大理系 H21 類題 >

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 2\cos\theta + \cos^2\theta \\ y = r\sin\theta = 2\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta \\ \frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta(1 + \cos\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = 2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 \end{cases}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より,

$\frac{dx}{d\theta} = 0$　$\Leftrightarrow$　$\theta = 0$　または　$\theta = \pi$

$\frac{dy}{d\theta} = 0$　$\Leftrightarrow$　$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

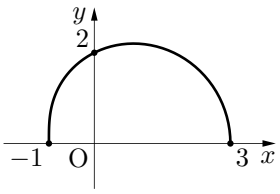
$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より, $\cos\theta = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ は不適当.

$\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ となる θ を α とおけば,

次のような **増減表** が書ける.

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	0
x		↘		↘	
$\frac{dy}{d\theta}$	0	$+$	0	$+$	
y		↗		↘	

よって, 以下のようなグラフが描ける.



★ $1, 2, 3, \cdots$ で考えろ

増減表は描けなくても, $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ の時を代入すればだいたいの形がわかる. それだけでここでは十分である.

☆京大 H21　極方程式　$r = 2 + \cos\theta$（$0 \leqq \theta \leqq \pi$）　を x 軸の周りに 1 回転させたときの体積を求めよ. 答えは $\frac{40}{3}\pi$.

力自慢はがんばってみよう.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 12 分 ）

(1) $r = \dfrac{1}{1+2\cos\theta}$

$\Rightarrow \quad r + 2r\cos\theta = 1$

$\Leftrightarrow \quad r = 1 - 2x$

$\Rightarrow \quad r^2 = (1-2x)^2$

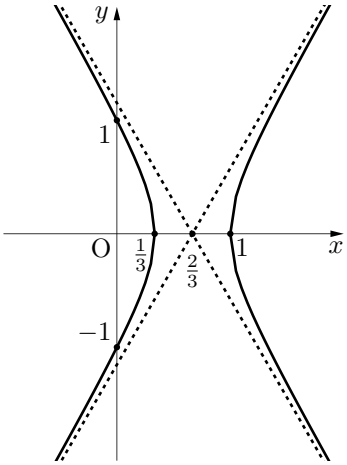
$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 - 4x + 4x^2$ …2 次曲線

$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 4x - y^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3(x - \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{3} - y^2 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - 3y^2 = 1$

$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\dfrac{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1}$ … **双曲線**



(2) $r = \sqrt{\sin 2\theta}$ ＜慶応大・類題＞

☆直交座標にしてできないこともないが煩雑.
このまま r を θ で微分するのが簡単.

題意から, $\sin 2\theta \geqq 0$

$\Leftrightarrow \quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ 又は $\pi \leqq \theta \leqq \frac{3}{2}\pi$

ゆえに第 1 象限と第 3 象限に同じ形が現れる.
第 3 象限は第 1 象限を原点に関して対称移動したものと考えてもよい.

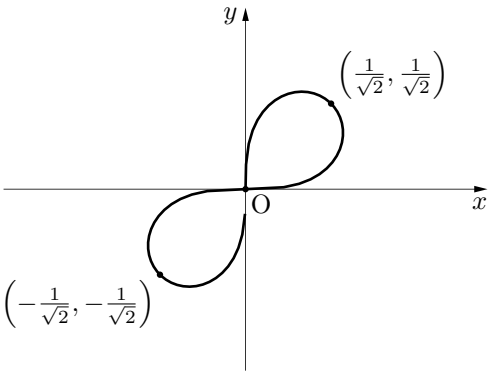
$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2\sqrt{\sin 2\theta}} \cdot 2\cos 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$

$\frac{dr}{d\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2\theta = 0$

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より, $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき極値をとる.
以上から, 次のような **増減表** が書ける.

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dr}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
r	0	↗	極値	↘	0

よって, 以下のようなグラフが描ける.



☆イメージ
$\sin 2\theta$ が $0 \sim \pi$ で 1 回りし, 以下その繰り返しであるから, 循環する関数である. よって円のように周期性のある図形になる. このイメージがあれば概形を描くのは難しくない.
★ $1, 2, 3, \cdots$ で考えろ
増減表は描けなくても, $\theta = 0$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$ の時を代入すればだいたいの形がわかる. それだけでここでは十分である.

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）