# 反射テスト　曲線　極方程式　02 難

**1.**　次の極方程式のグラフの概形を描け.（ $S$ 級 2 分, $A$ 級 4 分, $B$ 級 6 分 20 秒, $C$ 級 9 分 ）

(1)　$r = \dfrac{1}{\sqrt{2} + \cos\theta}$

(2)　$r = 2 + \cos\theta$　（ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ ）

**2.** 次の極方程式のグラフの概形を描け.（ $S$ 級 3 分 30 秒, $A$ 級 6 分, $B$ 級 9 分, $C$ 級 12 分 ）

(1) $r = \dfrac{1}{1+2\cos\theta}$

(2) $r = \sqrt{\sin 2\theta}$

# 反射テスト　曲線　極方程式　02難　解答解説

**1.**　次の極方程式のグラフの概形を描け.（ $S$ 級 2 分, $A$ 級 4 分, $B$ 級 6 分 20 秒, $C$ 級 9 分 ）

**★ 極方程式**

$xy$ 直交座標において, $(x, y)$ という **変数 2 個** を用いて, **方程式を 1 つ** 作れば, 座標平面上の **図形** を表す. 同様に極座標においても $(r, \theta)$ という **変数 2 個** を用いて **方程式を 1 つ** 作れば極座標平面上の **図形** を表す.

☆注意　$r < 0$ のときも考えるのが通例である. $r < 0$ のとき, $(r, \theta)$ は, $(|r|, \theta + \pi)$ を表す.

式の形で分類し図形を全て覚えるのもいいが, 出題頻度が低いために時間も労力ももったいない. そこで, グラフの描き方を 2 つ紹介する.

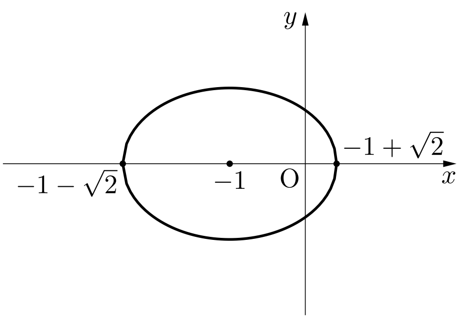
**①関係式を用いる**　極座標 $(r, \theta)$ と直交座標 $(x, y)$ の関係式を用いて, $(x, y)$ の方程式に変換する.

$$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta}$$

**②微分を用いる**　$x = f(\theta), y = g(\theta)$ の形になるのであれば, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ を計算して増減表からグラフを描く.

(1)　$r = \dfrac{1}{\sqrt{2} + \cos\theta}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \sqrt{2}r + r\cos\theta = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{2}r = 1 - x \\
&\Rightarrow \quad (\sqrt{2}r)^2 = (1-x)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 = 1 - 2x + x^2 \quad \cdots 2\text{ 次曲線} \\
&\Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 2y^2 - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + 2y^2 = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\frac{(x+1)^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1} \quad \cdots \textbf{楕円}
\end{aligned}$$




★極方程式 $r = \frac{1}{a + b\cos\theta}$ は 2 次曲線を表す.

$$\begin{cases} a^2 - b^2 > 0 \text{ のときは, 楕円} \\ a^2 - b^2 = 0 \text{ のときは, 放物線} \\ a^2 - b^2 < 0 \text{ のときは, 双曲線} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\quad\ \ r = \frac{1}{a + b\cos\theta} \\
&\Rightarrow \quad ar = 1 - br\cos\theta \\
&\Leftrightarrow \quad a^2r^2 = (1 - bx)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad a^2(x^2 + y^2) = (1 - bx)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad (a^2 - b^2)x^2 + 2bx + a^2y^2 = 1 \quad \cdots 2\text{ 次曲線}
\end{aligned}$$

(2)　$r = 2 + \cos\theta$　（ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ ）

< 京大理系 $H21$ 類題 >

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = 2\cos\theta + \cos^2\theta \\ y = r\sin\theta = 2\sin\theta + \sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta \\ \frac{dy}{d\theta} = 2\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta(1 + \cos\theta) \\ \frac{dy}{d\theta} = 2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 \end{cases}$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$　より,

$\frac{dx}{d\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0$　または　$\theta = \pi$

$\frac{dy}{d\theta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$

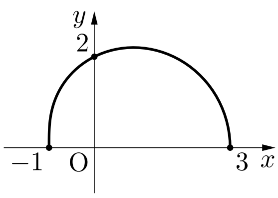
$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より, $\cos\theta = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$　は不適当.

$\cos\theta = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$　となる$\theta$を$\alpha$とおけば,

次のような **増減表** が書ける.

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dx}{d\theta}$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ |
| $x$ | | $\searrow$ | | $\searrow$ | |
| $\frac{dy}{d\theta}$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

よって, 以下のようなグラフが描ける.




★ $1, 2, 3$ で考えろ

増減表は描けなくても, $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ の時を代入すればだいたいの形がわかる. それだけでここでは十分である.

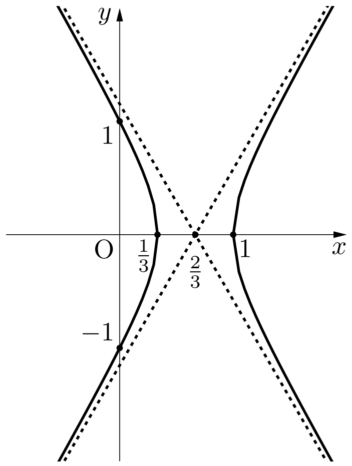
☆京大 $H21$　極方程式　$r = 2 + \cos\theta$　$(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

を $x$ 軸の周りに 1 回転させたときの体積を求めよ. 答えは $\frac{40}{3}\pi$であるから, 力自慢はがんばってみよう.

**2.** 次の極方程式のグラフの概形を描け.（ $S$ 級 3 分 30 秒, $A$ 級 6 分, $B$ 級 9 分, $C$ 級 12 分 ）

(1) $r=\dfrac{1}{1+2\cos\theta}$

$$\Rightarrow\quad r+2r\cos\theta=1$$
$$\Leftrightarrow\quad r=1-2x$$
$$\Rightarrow\quad r^2=(1-2x)^2$$
$$\Leftrightarrow\quad x^2+y^2=1-4x+4x^2 \quad \cdots 2\text{ 次曲線}$$
$$\Leftrightarrow\quad 3x^2-4x-y^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow\quad 3(x-\tfrac{2}{3})^2-\tfrac{4}{3}-y^2+1=0$$
$$\Leftrightarrow\quad 9\left(x-\tfrac{2}{3}\right)^2-3y^2=1$$
$$\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{\frac{(x-\frac{2}{3})^2}{(\frac{1}{3})^2}-\frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}=1} \quad \cdots\textbf{双曲線}$$




(2) $r=\sqrt{\sin 2\theta}$ ＜慶応大・類題＞

☆直交座標にしてできないこともないが煩雑.
このまま $r$ を$\theta$で微分するのが簡単.

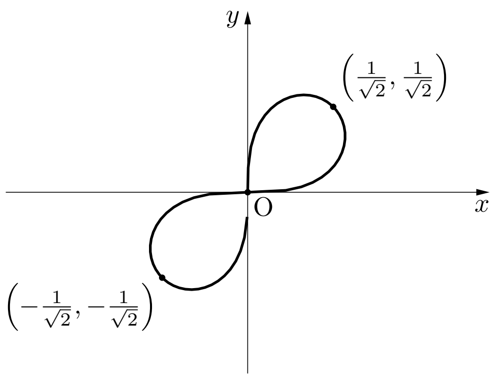
題意から, $\sin 2\theta \geqq 0$
$\Leftrightarrow\quad 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ 又は $\pi\leqq\theta\leqq\frac{3}{2}\pi$
ゆえに第 1 象限と第 3 象限に同じ形が現れる.
第 3 象限は第 1 象限を原点に関して対称移動したものと考えてもよい.

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{1}{2\sqrt{\sin 2\theta}}\cdot 2\cos 2\theta=\frac{\cos 2\theta}{\sqrt{\sin 2\theta}}$$

$\frac{dr}{d\theta}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos 2\theta=0$
$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ より, $\theta=\frac{\pi}{4}$ のとき極値をとる.
以上から, 次のような **増減表** が書ける.

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dr}{d\theta}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $r$ | $0$ | $\nearrow$ | 極値 | $\searrow$ | $0$ |

よって, 以下のようなグラフが描ける.




☆イメージ
$\sin 2\theta$ が $0\sim\pi$ で 1 回りし以下その繰り返しであるから, 循環する関数である. よって円のようにサイクルのある図形になる. このイメージがあれば概形を描くのは難しくない.
★ $1,2,3$ で考えろ
増減表は描けなくても, $\theta=0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ の時を代入すればだいたいの形がわかる. それだけでここでは十分である.