反射テスト　曲線　極方程式　01

1.　次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分 ）

(1)　$r = 3$

(2)　$r \sin\theta = 2$

(3)　$r \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$

(4)　$r = 2\sin\theta$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 3 分, A 級 6 分, B 級 8 分 30 秒, C 級 11 分 ）

(1) $r = \sin\dfrac{\pi}{2}$

(2) $\theta = \frac{\pi}{4}$

(3) $r\cos\theta = -3$

(4) $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

(5) $r = -6\cos\theta$

(6) $r^2 - 4r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 5$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　曲線　極方程式　01　解答解説

1.　次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分 ）

★ 極方程式

xy 直交座標において, (x, y) という **変数 2 個** による **1 つの方程式** が座標平面上の **図形** を表す. 同様に極座標においても (r, θ) という **変数 2 個** による **1 つの方程式** が極座標平面上の **図形** を表す.

☆注意　$r < 0$ のときも考えるのが通例である. $r < 0$ のとき, (r, θ) は, $(|r|, \theta + \pi)$ を表す.

式の形で分類し図形を全て覚えるのもいいが, 出題頻度が低いために時間も労力ももったいない. そこで, グラフの描き方を 2 つ紹介する.

①関係式を用いる　極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の関係式を用いて, (x, y) の方程式に変換する.

$\boldsymbol{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$　　$\boldsymbol{x = r\cos\theta}$　　$\boldsymbol{y = r\sin\theta}$

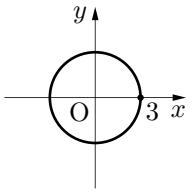
②微分を用いる　$x = f(\theta), y = g(\theta)$ の形になるのであれば, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ を計算して増減表からグラフを描く.

(1)　$r = 3$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ より,

$$\begin{aligned} \text{与式} &\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 3^2 \end{aligned}$$

中心が原点, 半径 3 の円 である.

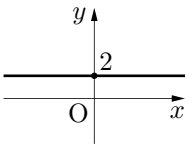


(2)　$r\sin\theta = 2$

$r\sin\theta = y$ より,

$$\text{与式} \Rightarrow y = 2$$

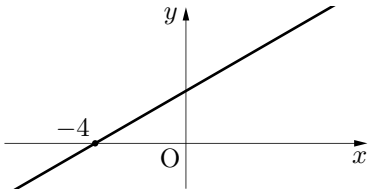
x 軸に平行な直線 である.



(3)　$r\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2$

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= r\left(\sin\theta \cdot \cos\tfrac{\pi}{6} - \cos\theta \cdot \sin\tfrac{\pi}{6}\right) \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} r\sin\theta - \tfrac{1}{2} r\cos\theta \\ &= \tfrac{\sqrt{3}}{2} y - \tfrac{1}{2} x \\ \therefore\ & \tfrac{\sqrt{3}}{2} y - \tfrac{1}{2} x = 2 \\ \Leftrightarrow\ & y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 4) \end{aligned}$$

傾き $\frac{1}{\sqrt{3}}$, x 切片 -4 の直線 である.



☆ (2) と比べて欲しい.

実はこの (3) は, (2) の直線を, 原点に関して $\frac{\pi}{6}$ の回転移動したものである.

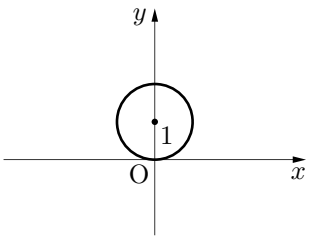
★ $F(r, \theta) = 0$ を原点に関して ϕ の回転移動したものは, $F(r, (\theta - \phi)) = 0$ である.

(4)　$r = 2\sin\theta$

両辺 $\times r$ より,

$$\begin{aligned} & r^2 = 2r\sin\theta \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + y^2 = 2y \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + (y - 1)^2 = 1 \end{aligned}$$

中心 $(0, 1)$, 半径 1 の円 である.



ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 3 分, A 級 6 分, B 級 8 分 30 秒, C 級 11 分 ）

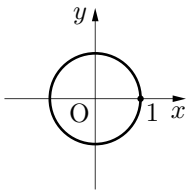
(1) $r = \sin\dfrac{\pi}{2}$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ より,

与式 $\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = \sqrt{1^2}$

中心が原点, 半径 1 の円 である.

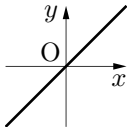


(2) $\theta = \frac{\pi}{4}$

r に関しては自由であるから, $r = 0$ （原点）も考える.

$r < 0$ の場合は原点に関して対称と考える.

よって, 下図のように, $\boldsymbol{y = x}$ の直線となる.

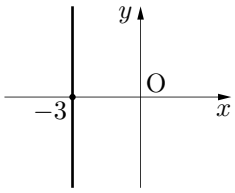


(3) $r\cos\theta = -3$

$r\cos\theta = x$ より,

与式 $\Rightarrow x = -3$

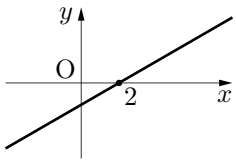
y 軸に平行な直線 である.



(4) $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= r\left(\cos\theta\cdot\cos\tfrac{\pi}{3} - \sin\theta\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \tfrac{1}{2}r\cos\theta - \tfrac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta\\
&= \tfrac{1}{2}x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y\\
\therefore\ & \tfrac{1}{2}x - \tfrac{\sqrt{3}}{2}y = 1\\
\Leftrightarrow\ & y = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(x-2)
\end{aligned}$$

傾き $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $\boldsymbol{x}$ 切片 2 の直線 である.



☆直線 $x = 1$ を $-\frac{\pi}{3}$ 回転移動してもよい.

★ $\begin{cases} r\cos(\theta-\alpha) = a & \cdots\ x = a \text{ を}\alpha\text{回転移動したもの} \\ r\sin(\theta-\alpha) = a & \cdots\ y = a \text{ を}\alpha\text{回転移動したもの} \end{cases}$

(5) $r = -6\cos\theta$

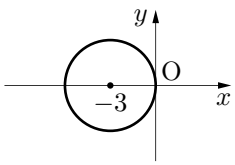
両辺 $\times r$ より,

$r^2 = -6r\cos\theta$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = -6x$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+y^2 = 3^2$

中心 $\boldsymbol{(-3, 0)}$, 半径 3 の円 である.



(6) $r^2 - 4r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 5$

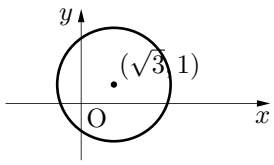
$\Leftrightarrow (x^2+y^2) - 4r\left(\cos\theta\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \sin\theta\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right) = 5$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2) - 2\sqrt{3}r\cos\theta - 2r\sin\theta = 5$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-2\sqrt{3}x-2y = 5$

$\Leftrightarrow (x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2 = 3^2$

中心 $\boldsymbol{(\sqrt{3}, 1)}$, 半径 3 の円 である.



ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）