反射テスト　曲線　極方程式　01

1.　次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分 ）

(1)　$r = 3$

(2)　$r \sin\theta = 2$

(3)　$r \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$

(4)　$r = 2\sin\theta$

2.　次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 3 分, A 級 6 分, B 級 8 分 30 秒, C 級 11 分 ）

(1)　$r = \sin \dfrac{\pi}{2}$

(2)　$\theta = \frac{\pi}{4}$

(3)　$r \cos \theta = -3$

(4)　$r \cos \left(\theta + \dfrac{\pi}{3} \right) = 1$

(5)　$r = -6 \cos \theta$

(6)　$r^2 - 4r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{6} \right) = 5$

反射テスト　曲線　極方程式　01　解答解説

1.　次の極方程式のグラフの概形を描け.（ S 級 2 分, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分 ）

★ 極方程式

xy 直交座標において, (x, y) という **変数 2 個** を用いて, **方程式を 1 つ** 作れば, 座標平面上の **図形** を表す. 同様に極座標においても (r, θ) という **変数 2 個** を用いて **方程式を 1 つ** 作れば極座標平面上の **図形** を表す.

☆注意　$r<0$ のときも考えるのが通例である. $r<0$ のとき, (r, θ) は, $(|r|, \theta+\pi)$ を表す.

式の形で分類し図形を全て覚えるのもいいが, 出題頻度が低いために時間も労力ももったいない. そこで, グラフの描き方を 2 つ紹介する.

①関係式を用いる　極座標 (r, θ) と直交座標 (x, y) の関係式を用いて, (x, y) の方程式に変換する.

$\boldsymbol{r=\sqrt{x^2+y^2}}$　　$\boldsymbol{x=r\cos\theta}$　　$\boldsymbol{y=r\sin\theta}$

②微分を用いる　$x=f(\theta), y=g(\theta)$ の形になるのであれば, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{dy}{d\theta}$ を計算して増減表からグラフを描く.

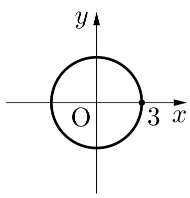
(1)　$r=3$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ より,

与式 $\Rightarrow$ $\sqrt{x^2+y^2}=3$

$\Leftrightarrow$ $x^2+y^2=3^2$

中心が原点, 半径 3 の円 である.

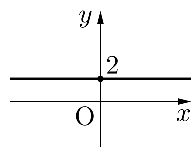


(2)　$r\sin\theta=2$

$r\sin\theta=y$ より,

与式 $\Rightarrow$ $y=2$

x 軸に平行な直線 である.



(3)　$r\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=2$

左辺 $=r\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{6}\right)$

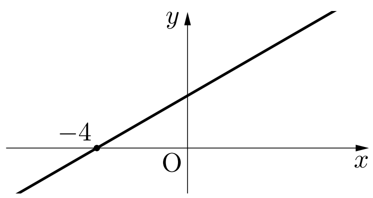
$=\frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta-\frac{1}{2}r\cos\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}x$

$\therefore$ $\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{1}{2}x=2$

$\Leftrightarrow$ $y=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+4)$

傾き $\frac{1}{\sqrt{3}}$, x 切片 -4 の直線 である.



☆ (2) と比べて欲しい.

実はこの (3) は, (2) の直線を, 原点に関して $\frac{\pi}{6}$ の回転移動したものである.

★一般に, $F(r, \theta)=0$ を原点に関して ϕ の回転移動したものは, $F(r, (\theta-\phi))=0$ である.

(4)　$r=2\sin\theta$

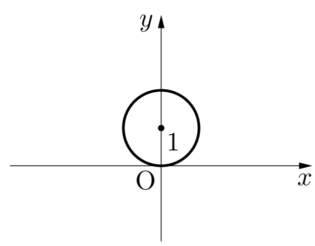
両辺 $\times r$ より,

$r^2=2r\sin\theta$

$\Leftrightarrow$ $x^2+y^2=2y$

$\Leftrightarrow$ $x^2+(y-1)^2=1$

中心 $(0, 1)$, 半径 1 の円 である.



2.　次の極方程式のグラフの概形を描け．（ S 級 3 分，A 級 6 分，B 級 8 分 30 秒，C 級 11 分 ）

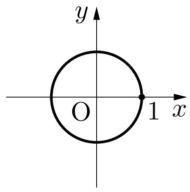
(1)　$r = \sin\frac{\pi}{2}$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ より，

与式　$\Rightarrow$　$\sqrt{x^2+y^2} = 1$

　　　$\Leftrightarrow$　$x^2+y^2 = \sqrt{1^2}$

中心が原点，半径 1 の円 である．

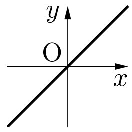


(2)　$\theta = \frac{\pi}{4}$

r に関しては自由であるから，$r=0$（原点）も考える．

$r<0$ の場合は原点に関して対称と考える．

よって，下図のように，$\boldsymbol{y = x}$ の直線となる．

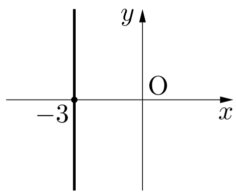


(3)　$r\cos\theta = -3$

$r\cos\theta = x$ より，

与式　$\Rightarrow$　$x = -3$

y 軸に平行な直線 である．



(4)　$r\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$

左辺 $= r\left(\cos\theta \cdot \cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right)$

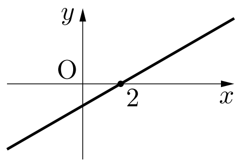
$= \frac{1}{2}r\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta$

$= \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y$

$\therefore$　$\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1$

$\Leftrightarrow$　$y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$

傾き $\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$，$\boldsymbol{x}$ 切片 2 の直線 である．



☆直線 $x = 1$ を $-\frac{\pi}{3}$ 回転移動してもよい．

★ $\begin{cases} r\cos(\theta-\alpha) = a & \cdots \quad x = a \text{ を}\alpha\text{回転移動したもの} \\ r\sin(\theta-\alpha) = a & \cdots \quad y = a \text{ を}\alpha\text{回転移動したもの} \end{cases}$

(5)　$r = -6\cos\theta$

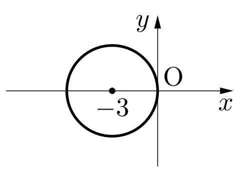
両辺 $\times\, r$ より，

　　$r^2 = -6r\cos\theta$

$\Leftrightarrow$　$x^2+y^2 = -6x$

$\Leftrightarrow$　$(x+3)^2+y^2 = 3^2$

中心 $\boldsymbol{(-3,0)}$，半径 3 の円 である．



(6)　$r^2 - 4r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 5$

$\Leftrightarrow$　$(x^2+y^2) - 4r\left(\cos\theta \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\theta \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) = 5$

$\Leftrightarrow$　$(x^2+y^2) - 2\sqrt{3}r\cos\theta - 2r\sin\theta = 5$

$\Leftrightarrow$　$x^2+y^2 - 2\sqrt{3}x - 2y = 5$

$\Leftrightarrow$　$(x-\sqrt{3})^2 + (y-1)^2 = 3^2$

中心 $\boldsymbol{(\sqrt{3},1)}$，半径 3 の円 である．