反射テスト　曲線　媒介変数表示　01

1.　次の直線・2 次曲線などを媒介変数表示せよ.（ S 級 2 分 20 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分 ）
例　$y = 2x \quad \Rightarrow \quad x = t\ ,\ y = 2t$　　ただし $t \in \mathbb{R}$　（ 以下 t や θ は実数 $\mathbb{R}$ としてよい ）

(1)　点 $(1, -2)$ を通り, 傾き $\sqrt{3}$ である直線

(2)　点 $A(-1, 2)$, $B(3, 5)$ としたときの線分 AB

(3)　$y = 2x^2 - 3$

(4)　$x^2 + y^2 = 1$

(5)　$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

(6)　$4x^2 - y^2 = 4$

2. 次の直線・2 次曲線などを媒介変数表示せよ.（ S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分 30 秒, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

例 $y = 2x \quad \Rightarrow \quad x = t\ ,\ y = 2t$ ただし $t \in \mathbb{R}$ （ 以下 t や θ は実数 $\mathbb{R}$ としてよい ）

(1) 点 $(-3, 1)$ を通り, 傾き $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である直線

(2) 点 $A(4, -2)$, $B(-2, 6)$ としたときの線分 AB

(3) $y^2 = x - 3$

(4) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

(5) $x^2 - 8x + 2y^2 + 4y = 0$

(6) $2x^2 + 12x - 3y^2 + 12y = 0$

反射テスト　曲線　媒介変数表示　01　解答解説

1.　次の直線・2 次曲線などを媒介変数表示せよ.（ S 級 2 分 20 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分 ）

例　$y = 2x \quad \Rightarrow \quad x = t$, $y = 2t$　　ただし $t \in \mathbb{R}$　（ 以下 t や θ は実数 $\mathbb{R}$ としてよい ）

★ 媒介変数表示

① 直線の方程式　$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b}$　（ 方向ベクトル (a, b) で点 (p, q) を通る直線 ）

これを t とおいて x, y について解く.　$\therefore x = at + p$,　$y = bt + q$　（ $t \in \mathbb{R}$ ）

☆線分の方程式の場合は t の範囲を定める必要がある.

② $\begin{cases} \text{反比例の方程式} & y - q = \frac{a}{x-p} \quad \Leftrightarrow \quad x = t + p \ , \quad y = \frac{a}{t} + q \\ \text{放物線の方程式} & y = a(x-p)^2 + q \quad \Leftrightarrow \quad x = t + p \ , \quad y = at^2 + q \end{cases}$

☆ $y = f(x)$ の形　$\Rightarrow$　$x = t$,　$y = f(t)$.（ $y = f(x-p)$ ならば工夫して $x = t + p$, $y = f(t)$ とおいた方がよい. ）

③ 円・楕円の方程式　$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = a\cos\theta + p$,　$y = b\sin\theta + q$

④ 双曲線の方程式　$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{a}{\cos\theta} + p$,　$y = b\tan\theta + q$

(1)　点 $(1, -2)$ を通り, 傾き $\sqrt{3}$ である直線

方向ベクトルの成分は, $(1, \sqrt{3})$

直線の方程式は, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{\sqrt{3}}$

$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{\sqrt{3}} = t$ とおいて,

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x = t + 1}$ **,**　$\boldsymbol{y = \sqrt{3}t - 2}$　**…答え**

☆答えは一意ではない.

$x = t$,　$y = \sqrt{3}(t-1) - 2$ でもよい.

☆代入してすぐに確かめること.

(2)　点 $A(-1, 2)$, $B(3, 5)$ としたときの線分 AB

方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は, $(3-(-1), 5-2) = (4, 3)$

直線 AB の方程式は, $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3}$

$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = t$ とおいて,

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x = 4t - 1}$ **,**　$\boldsymbol{y = 3t + 2}$ **（** $\boldsymbol{0 \leqq t \leqq 1}$ **）**　**…答え**

☆方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を約分せず, 方程式で点 A の座標を用いれば, 線分 AB を表す媒介変数の範囲は必ず, $0 \leqq t \leqq 1$ となる. 確かめてみよう. 参照〜ベクトルの内分点公式

☆別解（ x 座標を t とおく ）

$y - 2 = \frac{3}{4}(x+1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{4}(t+1) + 2 \end{cases}$　（ $-1 \leqq t \leqq 3$ ）

(3)　$y = 2x^2 - 3$

$x = t$ とおけば, $y = 2t^2 - 3$

$\boldsymbol{x = t}$ **,**　$\boldsymbol{y = 2t^2 - 3}$　**…答え**

☆ $y = f(x)$ となるとき, すなわち y が x の関数になるときは, 全てこれでもよい.

(4)　$x^2 + y^2 = 1$

$\boldsymbol{x = \cos\theta}$ **,**　$\boldsymbol{y = \sin\theta}$　**…答え**

（ ただし $\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi}$ **）**

☆円の方程式は頻出. 反射的に書けるように.

代入して式が成立することを確かめよう.

☆媒介変数の定義域は $-\pi \leqq \theta < \pi$ としてもよい.

(5)　$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

$\Leftrightarrow$　$\frac{x^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x = 2\cos\theta}$ **,**　$\boldsymbol{y = 3\sin\theta + 1}$　**…答え**

（ ただし $\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi}$ **）**

☆楕円も円の場合とよく似ている.

代入して式が成立することを確かめよう.

細かいミスを減らすことができる.

(6)　$4x^2 - y^2 = 4$

$\Leftrightarrow$　$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x = \frac{1}{\cos\theta}}$ **,**　$\boldsymbol{y = 2\tan\theta}$

（ ただし $\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi}$ **かつ** $\boldsymbol{\theta \neq \frac{\pi}{2}}$ **かつ** $\boldsymbol{\theta \neq \frac{3}{2}\pi}$ **）**

☆双曲線の場合, 代入したあと,

$\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta = 1$ の形になることを覚えておこう.

☆定義域は $-\pi \leqq \theta < \pi$ かつ $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$ としてもよい.

2. 次の直線・2 次曲線などを媒介変数表示せよ.（ S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分 30 秒, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

例 $y = 2x \Rightarrow x = t,\ y = 2t$ ただし $t \in \mathbb{R}$ （ 以下 t や θ は実数 $\mathbb{R}$ としてよい ）

(1) 点 $(-3, 1)$ を通り, 傾き $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である直線

方向ベクトルの成分は $\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

直線の方程式は, $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = t$ とおいて,

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x = t - 3,\ \ y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}t + 1}$ **…答え**

☆答えは一意ではない.

方向ベクトルを $(\sqrt{3}, -1)$ でとれば,

$x = \sqrt{3}t - 3,\ \ y = -t + 1$

y を x の関数とみて,

$x = t,\ \ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(t+3) + 1$ でもよい.

(2) 点 $A(4, -2)$, $B(-2, 6)$ としたときの線分 AB

方向ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$の成分は, $(-2-4, 6-(-2)) = (-6, 8)$

直線 AB の方程式は, $\dfrac{x-4}{-6} = \dfrac{y+2}{8}$

$\dfrac{x-4}{-6} = \dfrac{y+2}{8} = t$ とおいて,

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x = -6t + 4,\ y = 8t - 2\ (0 \leqq t \leqq 1)}$ **…答え**

☆別解（ x 座標を t とおく ）

$y + 2 = -\frac{4}{3}(x - 4) \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{4}{3}(t-4) - 2 \end{cases}$

（ ただし $-2 \leqq t \leqq 4$ ）

(3) $y^2 = x - 3$

$y = t$ とおけば, $t^2 = x - 3$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x = t^2 + 3,\ \ y = t}$ **…答え**

☆ $x = f(y)$ と考えればよい.

(4) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

$\boldsymbol{x = 3\cos\theta + 2,\ \ y = 3\sin\theta - 1}$ **…答え**

（ ただし $\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi}$ ）

☆媒介変数の定義域は $-\pi \leqq \theta < \pi$ としてもよい.

(5) $x^2 - 8x + 2y^2 + 4y = 0$

$\Leftrightarrow$ $(x-4)^2 + 2(y+1)^2 = 18$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{(x-4)^2}{(3\sqrt{2})^2} + \dfrac{(y+1)^2}{3^2} = 1$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x = 3\sqrt{2}\cos\theta + 4,\ \ y = 3\sin\theta - 1}$ **…答え**

（ ただし $\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi}$ ）

(6) $2x^2 + 12x - 3y^2 + 12y = 0$

$\Leftrightarrow$ $2(x+3)^2 - 3(y-2)^2 = 6$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{(x+3)^2}{\sqrt{3}^2} - \dfrac{(y-2)^2}{\sqrt{2}^2} = 1$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x = \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta} - 3,\ \ y = \sqrt{2}\tan\theta + 2}$ **…答え**

（ ただし $\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi}$ かつ $\boldsymbol{\theta \neq \frac{\pi}{2}}$ かつ $\boldsymbol{\theta \neq \frac{3}{2}\pi}$ ）

☆定義域は $-\pi \leqq \theta < \pi$ かつ $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$ としてもよい.