反射テスト　曲線　媒介変数表示　01

1.　次の直線, 2 次曲線などを媒介変数表示せよ.（ S 級 2 分 20 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分 ）

例　$y=2x \quad \Rightarrow \quad x=t\ ,\ y=2t$　　　ただし $t \in \mathbb{R}$　（ 以下 t や θ は実数 $\mathbb{R}$ としてよい . ）

(1)　点 $(1,-2)$ を通り, 傾き $\sqrt{3}$ である直線 .

(2)　点 $\mathrm{A}(-1,2)$, $\mathrm{B}(3,5)$ としたときの線分 AB .

(3)　$y=2x^2-3$

(4)　$x^2+y^2=1$

(5)　$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

(6)　$4x^2-y^2=4$

2.　次の直線, 2 次曲線などを媒介変数表示せよ.（ S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分 30 秒, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

例　$y = 2x$　$\Rightarrow$　$x = t$, $y = 2t$　　ただし $t \in \mathbb{R}$　（ 以下 t や θ は実数 $\mathbb{R}$ としてよい . ）

(1)　点 $(-3, 1)$ を通り, 傾き $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である直線 .

(2)　点 A$(4, -2)$, B$(-2, 6)$ としたときの線分 AB .

(3)　$y^2 = x - 3$

(4)　$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$

(5)　$x^2 - 8x + 2y^2 + 4y = 0$

(6)　$2x^2 + 12x - 3y^2 + 12y = 0$

反射テスト　曲線　媒介変数表示　01　解答解説

1.　次の直線, 2 次曲線などを媒介変数表示せよ.（ S 級 2 分 20 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分 ）

例　$y = 2x$　$\Rightarrow$　$x = t$, $y = 2\mathrm{t}$　　ただし $t \in \mathbb{R}$　（ 以下 t や θ は実数 $\mathbb{R}$ としてよい. ）

★ 媒介変数表示

①　直線の方程式 $\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b}$ （ 方向ベクトル (a, b) で点 (p, q) を通る直線 ）

これを t とおいて $x, y,$ について解く.　$\therefore\ x = at + p$, $y = bt + q$　（ $t \in \mathbb{R}$ ）

☆線分の方程式の場合は t の範囲を定める必要がある.

② $\begin{cases} \text{反比例の方程式}\quad y - q = \frac{a}{x-p} \quad \Leftrightarrow \quad x = t + p\ ,\ \ y = \frac{a}{t} + q \\ \text{放物線の方程式}\quad y = a(x-p)^2 + q \quad \Leftrightarrow \quad x = t + p\ ,\ \ y = at^2 + q \end{cases}$

☆ $y = f(x)$ の形　$\Rightarrow$　$x = t$, $y = f(t)$.（ $y = f(x - p)$ ならば工夫して $x = t + p$, $y = f(t)$ とおいた方がよい. ）

③　円・楕円の方程式　$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$　$\Leftrightarrow$　$x = a\cos\theta + p$, $y = b\sin\theta + q$

④　双曲線の方程式　$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$　$\Leftrightarrow$　$x = \dfrac{a}{\cos\theta} + p$, $y = b\tan\theta + q$

(1)　点 $(1, -2)$ を通り, 傾き $\sqrt{3}$ である直線.

方向ベクトルの成分は, $(1, \sqrt{3})$

直線の方程式は, $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{\sqrt{3}}$

$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{\sqrt{3}} = t$ とおいて,

$\boldsymbol{x = t + 1\ ,\ \ y = \sqrt{3}t - 2}$

☆ 答えは一意ではない.

$x = t$, $y = \sqrt{3}(t-1) - 2$ でもよい.

☆代入してすぐに確かめること.

(2)　点 $\mathrm{A}(-1, 2)$, $\mathrm{B}(3, 5)$ としたときの線分 AB .

方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は, $(3 - (-1), 5 - 2) = (4, 3)$

直線 AB の方程式は, $\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3}$

$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = t$ とおいて,

$\boldsymbol{x = 4t - 1\ ,\ \ y = 3t + 2\ \ (0 \leqq t \leqq 1)}$

☆方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を約分せず, 方程式で点 A の座標を用いれば, 線分 AB を表す媒介変数の範囲は必ず, $0 \leqq t \leqq 1$ となる. 確かめてみよう. 参照〜ベクトルの内分点公式

☆別解（ x 座標を t とおく. ）

$y - 2 = \frac{3}{4}(x+1)$　$\Rightarrow$　$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{4}(t+1) + 2 \end{cases}$　（ $-1 \leqq t \leqq 3$ ）

(3)　$y = 2x^2 - 3$

$x = t$ とおけば, $y = 2t^2 - 3$

$\boldsymbol{x = t\ ,\ \ y = 2t^2 - 3}$

☆ $y = f(x)$ となるとき, すなわち y が x の関数になるときは, 全てこれでもよい.

(4)　$x^2 + y^2 = 1$

$\boldsymbol{x = \cos\theta\ ,\ \ y = \sin\theta}$

(ただし $\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi}$)

☆円の方程式は頻出. 反射的に書けるように.

代入して式が成立することを確かめよう.

☆媒介変数の定義域は $-\pi \leqq \theta < \pi$ としてもよい.

(5)　$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

$\Leftrightarrow$　$\frac{x^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x = 2\cos\theta\ ,\ \ y = 3\sin\theta + 1}$

(ただし $\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi}$)

☆楕円も円の場合とよく似ている.

代入して式が成立することを確かめよう.

細かいミスを減らすことができる.

(6)　$4x^2 - y^2 = 4$

$\Leftrightarrow$　$\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

$\Leftrightarrow$　$\boldsymbol{x = \frac{1}{\cos\theta}\ ,\ y = 2\tan\theta}$

(ただし $\boldsymbol{0 \leqq \theta < 2\pi}$ かつ $\boldsymbol{\theta \neq \frac{\pi}{2}}$ かつ $\boldsymbol{\theta \neq \frac{3}{2}\pi}$)

☆双曲線の場合, 代入したあと,

$\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta = 1$ の形になることを覚えておこう.

☆定義域は $-\pi \leqq \theta < \pi$ かつ $\theta \neq \pm\frac{\pi}{2}$ としてもよい.

2. 次の直線, 2 次曲線などを媒介変数表示せよ.（ S 級 3 分 20 秒, A 級 5 分 30 秒, B 級 8 分, C 級 12 分 ）

例 $y=2x \Rightarrow x=t\ ,\ y=2t$ ただし $t\in\mathbb{R}$ （ 以下 t や θ は実数 $\mathbb{R}$ としてよい ）

(1) 点 $(-3,1)$ を通り, 傾き $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である直線 .

方向ベクトルの成分は $\left(1,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

直線の方程式は, $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-1}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}=t$ とおいて,

$$\boldsymbol{x=t-3\ ,\ \ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}t+1}$$

☆ **答えは一意ではない.**

方向ベクトルを $(\sqrt{3},-1)$ でとれば,

$x=\sqrt{3}t-3\ ,\ y=-t+1$

y を x の関数とみて,

$x=t\ ,\ y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(t+3)+1$ でもよい.

(2) 点 $\mathrm{A}(4,-2)$, $\mathrm{B}(-2,6)$ としたときの線分 AB .

方向ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の成分は, $(-2-4,6-(-2))=(-6,8)$

直線 AB の方程式は, $\dfrac{x-4}{-6}=\dfrac{y+2}{8}$

$\dfrac{x-4}{-6}=\dfrac{y+2}{8}=t$ とおいて,

$$\boldsymbol{x=-6t+4,\ \ y=8t-2\ \ (0\leqq t\leqq 1)}$$

☆別解（ x 座標を t とおく. ）

$y+2=-\frac{4}{3}(x-4) \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-\frac{4}{3}(t-4)-2 \end{cases}$

（ ただし $-2\leqq t\leqq 4$ ）

(3) $y^2=x-3$

$y=t$ とおけば, $t^2=x-3$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{x=t^2+3\ ,\ \ y=t}$

☆ $x=f(y)$ と考えればよい.

(4) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$

$\boldsymbol{x=3\cos\theta+2\ ,\ \ y=3\sin\theta-1}$

（ ただし $\boldsymbol{0\leqq\theta<2\pi}$ ）

☆媒介変数の定義域は $-\pi\leqq\theta<\pi$ としてもよい.

(5) $x^2-8x+2y^2+4y=0$

$\Leftrightarrow$ $(x-4)^2+2(y+1)^2=18$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{(x-4)^2}{(3\sqrt{2})^2}+\dfrac{(y+1)^2}{3^2}=1$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x=3\sqrt{2}\cos\theta+4\ ,\ \ y=3\sin\theta-1}$

（ ただし $\boldsymbol{0\leqq\theta<2\pi}$ ）

(6) $2x^2+12x-3y^2+12y=0$

$\Leftrightarrow$ $2(x+3)^2-3(y-2)^2=6$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{(x+3)^2}{\sqrt{3}^2}-\dfrac{(y-2)^2}{\sqrt{2}^2}=1$

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}-3\ ,\ \ y=\sqrt{2}\tan\theta+2}$

（ ただし $\boldsymbol{0\leqq\theta<2\pi}$ かつ $\boldsymbol{\theta\neq\frac{\pi}{2}}$ かつ $\boldsymbol{\theta\neq\frac{3}{2}\pi}$ ）

☆定義域は $-\pi\leqq\theta<\pi$ かつ $\theta\neq\pm\frac{\pi}{2}$ としてもよい.