反射テスト　曲線　軌跡　媒介変数消去　01

1.　動点 $P(x,y)$ が次の条件を満たすとき，動点 P の軌跡を表す方程式を求めよ．

（ S 級 2 分，A 級 3 分 20 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

(1)　$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t^2 - 1 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 2\sin\theta \end{cases}$

(3)　$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t - \dfrac{1}{t} \end{cases}$

(4)　$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

2. 動点 $P(x,y)$ が次の条件を満たすとき，動点 P の軌跡を表す方程式を求めよ．

（ S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

(1) $\begin{cases} x = 4t - 2 \\ y = -t^2 + 3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 5\cos\theta \\ y = 4\sin\theta \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{t} \\ y = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{t} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = \dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

反射テスト　曲線　軌跡　媒介変数消去　01　解答解説

1.　動点 $P(x, y)$ が次の条件を満たすとき，動点 P の軌跡を表す方程式を求めよ．

（ S 級 2 分，A 級 3 分 20 秒，B 級 5 分，C 級 7 分 ）

★ 媒介変数表示①　t を消去して，x, y の関係式を導く．

(1)　$\begin{cases} x = 3t & \cdots① \\ y = 2t^2 - 1 & \cdots② \end{cases}$

①　$\Leftrightarrow$　$t = \frac{x}{3}$

これを②に代入して，

$y = 2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1$

$\boldsymbol{y = \dfrac{2}{9}x^2 - 1}$　**…放物線**

(2)　$\begin{cases} x = \cos\theta & \cdots① \\ y = 2\sin\theta & \cdots② \end{cases}$

②　$\Leftrightarrow$　$\frac{y}{2} = \sin\theta$　$\cdots③$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に①，③を代入して，

$\boldsymbol{x^2 + \dfrac{y^2}{2^2} = 1}$　**…楕円**

(3)　$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} & \cdots① \\ y = t - \dfrac{1}{t} & \cdots② \end{cases}$

①の両辺を 2 乗　$\Rightarrow$　$x^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$　$\cdots③$

②の両辺を 2 乗　$\Rightarrow$　$y^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2$　$\cdots④$

③と④から，$x^2 - 2 = y^2 + 2$

$\Rightarrow$　$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{2^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = 1}$　**…双曲線**

(4)　$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2} & \cdots① \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \cdots② \end{cases}$

★この形は $t = \tan\theta$ として変形．

$t = \tan\theta$とおくと，

$$\begin{aligned}
①\quad &\Rightarrow\quad x = \tfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \\
&\Leftrightarrow\quad x = 2\tan\theta\cos^2\theta \\
&\Leftrightarrow\quad x = 2\sin\theta\cos\theta \\
&\Leftrightarrow\quad x = \sin 2\theta \quad \cdots③ \\
②\quad &\Rightarrow\quad y = \tfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \\
&\Leftrightarrow\quad y = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\
&\Leftrightarrow\quad y = \cos 2\theta \quad \cdots④
\end{aligned}$$

$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ であるから，

③，④より，

$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$　**…円**

ただし $(0, -1)$ の点は除く　…☆注意

☆　なぜならば，$t = \tan\theta$とおいたので，

$\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$　（n は整数）

よって，$\begin{cases} x \neq \sin 2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ y \neq \cos 2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$　$\Leftrightarrow$　$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq -1 \end{cases}$

2. 動点 $P(x,y)$ が次の条件を満たすとき，動点 P の軌跡を表す方程式を求めよ．

（ S 級 3 分，A 級 5 分，B 級 7 分，C 級 10 分 ）

(1) $\begin{cases} x = 4t - 2 & \cdots ① \\ y = -t^2 + 3 & \cdots ② \end{cases}$

① $\Leftrightarrow$ $t = \frac{x+2}{4}$

これを②に代入して，

$y = -\left(\frac{x+2}{4}\right)^2 + 3$

$\boldsymbol{y = -\frac{1}{16}(x+2)^2 + 3}$ **…放物線**

(2) $\begin{cases} x = 5\cos\theta & \cdots ① \\ y = 4\sin\theta & \cdots ② \end{cases}$

① $\Leftrightarrow$ $\frac{x}{5} = \cos\theta$ …③

② $\Leftrightarrow$ $\frac{y}{4} = \sin\theta$ …④

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に③，④を代入して，

$\boldsymbol{\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1}$ **…楕円**

(3) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{t} & \cdots ① \\ y = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{t} & \cdots ② \end{cases}$

①の両辺を 2 乗 $\Rightarrow$ $x^2 = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{t^2} - 1$ …③

②の両辺を 2 乗 $\Rightarrow$ $y^2 = \frac{t^2}{4} + \frac{1}{t^2} + 1$ …④

③と④から，$x^2 + 1 = y^2 - 1$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = -1}$ **…双曲線**

(4) $\begin{cases} x = \dfrac{(1+t)^2}{1+t^2} & \cdots ① \\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \cdots ② \end{cases}$

① $\Leftrightarrow$ $x = \dfrac{1+2t+t^2}{1+t^2}$

$\Leftrightarrow$ $x = 1 + \dfrac{2t}{1+t^2}$

$\Leftrightarrow$ $x - 1 = \dfrac{2t}{1+t^2}$ …③

★この形は $t = \tan\theta$ として変形．

$t = \tan\theta$とおくと，

③ $\Rightarrow$ $x - 1 = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\Leftrightarrow$ $x - 1 = 2\tan\theta\cos^2\theta$

$\Leftrightarrow$ $x - 1 = 2\sin\theta\cos\theta$

$\Leftrightarrow$ $x - 1 = \sin 2\theta$ …④

② $\Rightarrow$ $y = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$\Leftrightarrow$ $y = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$\Leftrightarrow$ $y = \cos 2\theta$ …⑤

$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1$ であるから，

③，④より，

$\boldsymbol{(x-1)^2 + y^2 = 1}$ **…円**

ただし $\boldsymbol{(1,-1)}$ の点は除く …☆注意

☆ $t = \tan\theta$ より， $\theta \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$ （n は整数）

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x - 1 \neq \sin 2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ y \neq \cos 2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x \neq 1 \\ y \neq -1 \end{cases}$