

反射テスト 曲線 双曲線 01

1. 次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ。(S級3分, A級5分, B級7分, C級10分)

(1) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

(2) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = -1$

(3) $(x+1)^2 - \frac{(y-3)^2}{3} = 1$

(4) $x^2 - 2x - y^2 - 4y = 0$

2. 次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ。(S級3分40秒, A級6分, B級9分, C級13分)

(1) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

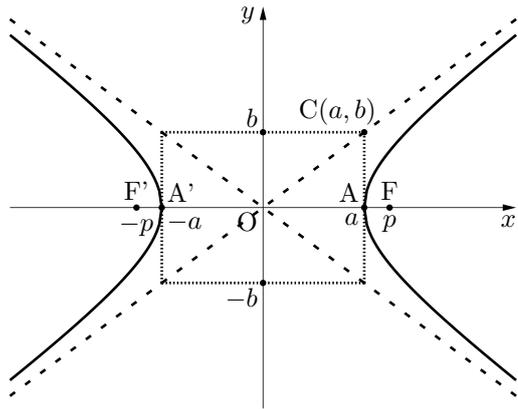
(2) $4y^2 - 5x^2 = 40$

(3) $(y + 3)^2 - 4(x - 3)^2 = 1$

(4) $x(x + 4) = 2y(y - 2)$

反射テスト 曲線 双曲線 01 解答解説

1. 次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ。(S級3分, A級5分, B級7分, C級10分)



★ 横の双曲線の方程式 (a, b は正)

x 軸上の定点 $F(p, 0)$, $F'(-p, 0)$ に対して,
 $|PF - PF'| = 2a$ を満たす動点 $P(x, y)$ の軌跡の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ と表すことができ,}$$

左図のように頂点が2つある. 頂点 $\sim A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$

このとき, F, F' を焦点といい, 焦点 F, F' の座標は,

$$F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 + b^2}, 0) \text{ となる.}$$

☆イメージ 直角三角形 OAC の斜辺 $OC = OF$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = p^2 \Rightarrow p = \sqrt{a^2 + b^2}$$

漸近線の方程式は, $y = \pm \frac{b}{a}x$ である.

★ 縦の双曲線の方程式 (a, b は正)

y 軸上の定点 $F(0, p)$, $F'(0, -p)$ に対して,

$|PF - PF'| = 2b$ を満たす動点 $P(x, y)$ の軌跡の方程式は,

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ と表すことができる. } \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ でもよい. } \right)$$

このとき頂点は $(0, b)$, $(0, -b)$ であり, 焦点 F, F' の座標は, $F(0, \sqrt{a^2 + b^2})$, $F'(0, -\sqrt{a^2 + b^2})$ となる.

漸近線の方程式は, 横の双曲線の場合と同じく, $y = \pm \frac{b}{a}x$ である.

(1) $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$

横の双曲線である.

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

焦点の座標は, $(\pm 5, 0)$ …答え

漸近線の方程式は, $y = \pm \frac{4}{3}x$ …答え

(2) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{6^2} = 1$$

縦の双曲線である.

$$\sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$$

\Rightarrow 焦点の座標は, $(0, \pm 2\sqrt{13})$ …答え

漸近線の方程式は, $y = \pm \frac{4}{6}x \Rightarrow y = \pm \frac{2}{3}x$ …答え

(3) $(x+1)^2 - \frac{(y-3)^2}{3} = 1$ …①

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{\sqrt{3}^2} = 1 \text{ …②}$$

①, ②ともに, 横の双曲線である.

$$\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2 \Rightarrow \text{②の焦点 } (\pm 2, 0)$$

双曲線①は双曲線②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向 } -1 \\ y \text{ 軸方向 } +3 \end{cases}$ 平行移動したもの

焦点も平行移動して, 焦点 $(\pm 2 - 1, 0 + 3)$

\Rightarrow 焦点 $(1, 3), (-3, 3)$ …答え

②の漸近線 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{1}x$ も同様に平行移動して,

①の漸近線は, $y - 3 = \pm \sqrt{3}(x + 1)$ …答え

(4) $x^2 - 2x - y^2 - 4y = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - (y+2)^2 = -3 \text{ …① } \leftarrow \text{☆平方完成}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{3}^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = -1 \text{ …②}$$

①, ②ともに, 縦の双曲線である.

$$\sqrt{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{6} \Rightarrow \text{②の焦点 } (0, \pm \sqrt{6})$$

双曲線①は双曲線②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向 } +1 \\ y \text{ 軸方向 } -2 \end{cases}$ 平行移動したもの

焦点も平行移動して, 焦点 $(0 + 1, \pm \sqrt{6} - 2)$

\Rightarrow 焦点 $(1, -2 - \sqrt{6}), (1, -2 + \sqrt{6})$ …答え

②の漸近線 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x \Rightarrow y = \pm x$

平行移動して, ①の漸近線は $y + 2 = \pm 1(x - 1)$

\Rightarrow ①の漸近線 $y = x - 3, y = -x - 1$ …答え

2. 次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ。(S級3分40秒, A級6分, B級9分, C級13分)

$$(1) \quad \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

横の双曲線である.

$$\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

焦点の座標は, $(\pm\sqrt{13}, 0)$ …答え

漸近線の方程式は, $y = \pm\frac{2}{3}x$ …答え

$$(2) \quad 4y^2 - 5x^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{10} - \frac{x^2}{8} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{\sqrt{10}^2} = -1$$

縦の双曲線である.

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2 + \sqrt{10}^2} = 3\sqrt{2}$$

焦点の座標は, $(0, \pm 3\sqrt{2})$ …答え

漸近線の方程式は, $y = \pm\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}x$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}x \quad \dots\text{答え}$$

$$(3) \quad (y+3)^2 - 4(x-3)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{(y+3)^2}{1^2} = -1 \quad \dots\text{①}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} - \frac{y^2}{1^2} = -1 \quad \dots\text{②}$$

①, ②ともに, 縦の双曲線である.

$$\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \text{②の焦点}(0, \pm\frac{\sqrt{5}}{2})$$

双曲線①は双曲線②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向} + 3 \\ y \text{ 軸方向} - 3 \end{cases}$ 平行移動したもの

焦点も平行移動して, 焦点 $(0+3, \pm\frac{\sqrt{5}}{2} - 3)$

$$\Rightarrow \text{焦点} \left(3, -3 + \frac{\sqrt{5}}{2} \right), \left(3, -3 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \quad \dots\text{答え}$$

$$\text{②の漸近線 } y = \pm\frac{1}{2}x \Rightarrow y = \pm 2x$$

これを平行移動して, ①の漸近線は, $y+3 = \pm 2(x-3)$

$$\Rightarrow y = 2x - 9, y = -2x + 3 \quad \dots\text{答え}$$

$$(4) \quad x(x+4) = 2y(y-2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 4x + 4) - 2(y^2 - 2y + 1) = 2$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 2(y-1)^2 = 2 \quad \leftarrow \star\text{平方完成}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{2} - (y-1)^2 = 1 \quad \dots\text{①}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{2}^2} - \frac{y^2}{1^2} = 1 \quad \dots\text{②}$$

①, ②ともに, 横の双曲線である.

$$\sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \text{②の焦点}(\pm\sqrt{3}, 0)$$

双曲線①は双曲線②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向} - 2 \\ y \text{ 軸方向} + 1 \end{cases}$ 平行移動したもの

焦点も平行移動して, 焦点 $(\pm\sqrt{3} - 2, 0 + 1)$

$$\Rightarrow \text{焦点} \left(-2 + \sqrt{3}, 1 \right), \left(-2 - \sqrt{3}, 1 \right) \quad \dots\text{答え}$$

$$\text{②の漸近線 } y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$$\text{平行移動して, } y - 1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x + 2) \quad \dots\text{答え}$$