反射テスト　曲線　双曲線　01

1.　次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1)　$\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$

(2)　$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{16}=-1$

(3)　$(x+1)^2-\dfrac{(y-3)^2}{3}=1$

(4)　$x^2-2x-y^2-4y=0$

2. 次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ.（ S 級 3 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1) $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

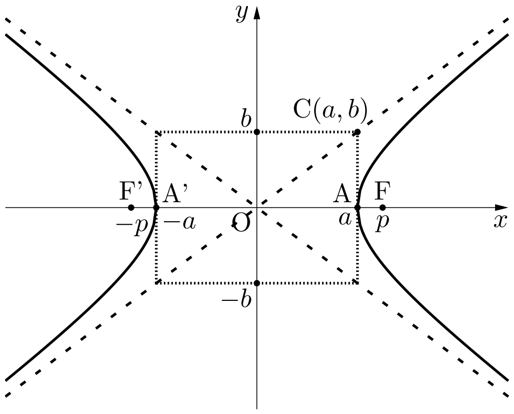
(2) $4y^2 - 5x^2 = 40$

(3) $(y+3)^2 - 4(x-3)^2 = 1$

(4) $x(x+4) = 2y(y-2)$

反射テスト　曲線　双曲線　01　解答解説

1.　次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）



★ 横の双曲線の方程式　（ a, b は正 ）

x 軸上の定点 $\mathrm{F}(p, 0)$, $\mathrm{F'}(-p, 0)$ に対して,
$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2a$ を満たす動点 $\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡の方程式は,
$\boldsymbol{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1}$ と表すことができ,
左図のように頂点が 2 つある. 頂点〜$\mathrm{A}(a, 0)$, $\mathrm{A'}(-a, 0)$

このとき, F,F' を焦点といい, 焦点 F,F' の座標は,
$\boldsymbol{\mathrm{F}\left(\sqrt{a^2+b^2}, 0\right),\ \mathrm{F'}\left(-\sqrt{a^2+b^2}, 0\right)}$ となる.
☆イメージ　直角三角形 OAC の斜辺 OC = OF
$\Rightarrow \quad a^2+b^2=p^2 \quad \Rightarrow \quad p=\sqrt{a^2+b^2}$
漸近線の方程式は, $\boldsymbol{y=\pm\dfrac{b}{a}x}$ である.

★ 縦の双曲線の方程式　（ a, b は正 ）

y 軸上の定点 $\mathrm{F}(0, p)$, $\mathrm{F'}(0, -p)$ に対して,
$|\mathrm{PF}-\mathrm{PF'}|=2b$ を満たす動点 $\mathrm{P}(x, y)$ の軌跡の方程式は,
$\boldsymbol{\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1}$ と表すことができる. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1 \quad \text{でもよい.} \right)$
このとき頂点は $(0, b)$, $(0, -b)$ であり, 焦点 F,F' の座標は, $\boldsymbol{\mathrm{F}\left(0, \sqrt{a^2+b^2}\right),\ \mathrm{F'}\left(0, -\sqrt{a^2+b^2}\right)}$ となる.
漸近線の方程式は, 横の双曲線の場合と同じく, $\boldsymbol{y=\pm\dfrac{b}{a}x}$ である.

(1)　$\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{4^2}=1$

横の双曲線である.
$\sqrt{3^2+4^2}=5$

焦点の座標は,　$\boldsymbol{(\pm 5, 0)}$　…答え
漸近線の方程式は,　$\boldsymbol{y=\pm\dfrac{4}{3}x}$　…答え

(2)　$\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{16}=-1$

$\left(\Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{4^2}-\frac{x^2}{6^2}=1\right)$

縦の双曲線である.
$\sqrt{6^2+4^2}=2\sqrt{13}$
$\Rightarrow$　焦点の座標は,　$\boldsymbol{(0, \pm 2\sqrt{13})}$　…答え
漸近線の方程式は,　$y=\pm\frac{4}{6}x \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{y=\pm\dfrac{2}{3}x}$　…答え

(3)　$(x+1)^2-\dfrac{(y-3)^2}{3}=1$　…①

$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{\sqrt{3}^2}=1$　…②

①, ②ともに, 横の双曲線である.
$\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2 \quad \Rightarrow$　②の焦点 $(\pm 2, 0)$

双曲線①は双曲線②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向 } -1 \\ y \text{ 軸方向 } +3 \end{cases}$ 平行移動したもの
焦点も平行移動して, 焦点 $(\pm 2-1, 0+3)$
$\Rightarrow$　焦点 $\boldsymbol{(1, 3), (-3, 3)}$　…答え

②の漸近線　$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{1}x$　も同様に平行移動して,
①の漸近線は,　$\boldsymbol{y-3=\pm\sqrt{3}(x+1)}$　…答え

(4)　$x^2-2x-y^2-4y=0$

$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2-(y+2)^2=-3$　…①　←☆平方完成
$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{\sqrt{3}^2}-\frac{y^2}{(\sqrt{3})^2}=-1$　…②
①, ②ともに, 縦の双曲線である.
$\sqrt{\sqrt{3}^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{6} \quad \Rightarrow$　②　の焦点 $(0, \pm\sqrt{6})$

双曲線①は双曲線②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向 } +1 \\ y \text{ 軸方向 } -2 \end{cases}$ 平行移動したもの
焦点も平行移動して, 焦点 $(0+1, \pm\sqrt{6}-2)$
$\Rightarrow$　焦点 $\boldsymbol{\left(1, -2-\sqrt{6}\right), \left(1, -2+\sqrt{6}\right)}$　…答え

②の漸近線　$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}x \quad \Rightarrow \quad y=\pm x$
平行移動して, ①の漸近線は　$y+2=\pm 1(x-1)$
$\Rightarrow$　①の漸近線　$\boldsymbol{y=x-3,\ y=-x-1}$　…答え

2. 次の双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ.（ S 級 3 分 40 秒, A 級 6 分, B 級 9 分, C 級 13 分 ）

(1) $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$

横の双曲線である.

$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

焦点の座標は, $\boldsymbol{(\pm\sqrt{13},0)}$ …**答え**

漸近線の方程式は, $\boldsymbol{y=\pm\dfrac{2}{3}x}$ …**答え**

(2) $4y^2-5x^2=40$

$\Leftrightarrow\ \frac{y^2}{10}-\frac{x^2}{8}=1$

$\Leftrightarrow\ \frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2}-\frac{y^2}{\sqrt{10}^2}=-1$

縦の双曲線である.

$\sqrt{(2\sqrt{2})^2+\sqrt{10}^2}=3\sqrt{2}$

焦点の座標は, $\boldsymbol{(0,\pm3\sqrt{2})}$ …**答え**

漸近線の方程式は, $y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{2}}x$

$\Rightarrow\ \boldsymbol{y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x}$ …**答え**

(3) $(y+3)^2-4(x-3)^2=1$

$\Leftrightarrow\ \frac{(x-3)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{(y+3)^2}{1^2}=-1$ …①

$\Rightarrow\ \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{y^2}{1^2}=-1$ …②

①, ②ともに, 縦の双曲線である.

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow$ ②の焦点 $(0,\pm\frac{\sqrt{5}}{2})$

双曲線①は双曲線②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向} +3 \\ y \text{ 軸方向} -3 \end{cases}$ 平行移動したもの

焦点も平行移動して, 焦点 $\left(0+3,\pm\frac{\sqrt{5}}{2}-3\right)$

$\Rightarrow$ 焦点 $\boldsymbol{\left(3,-3+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right),\left(3,-3-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)}$ …**答え**

②の漸近線 $y=\pm\frac{1}{\frac{1}{2}}x$ $\Rightarrow$ $y=\pm2x$

これを平行移動して, ①の漸近線は, $y+3=\pm2(x-3)$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{y=2x-9,\ y=-2x+3}$ …**答え**

(4) $x(x+4)=2y(y-2)$

$\Leftrightarrow\ (x^2+4x+4)-2(y^2-2y+1)=2$

$\Leftrightarrow\ (x+2)^2-2(y-1)^2=2$ ←☆平方完成

$\Leftrightarrow\ \frac{(x+2)^2}{2}-(y-1)^2=1$ …①

$\Rightarrow\ \frac{x^2}{\sqrt{2}^2}-\frac{y^2}{1}=1$ …②

①, ②ともに, 横の双曲線である.

$\sqrt{\sqrt{2}^2+1^2}=\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ ② の焦点 $(\pm\sqrt{3},0)$

双曲線①は双曲線②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向} -2 \\ y \text{ 軸方向} +1 \end{cases}$ 平行移動したもの

焦点も平行移動して, 焦点 $(\pm\sqrt{3}-2,0+1)$

$\Rightarrow$ 焦点 $\boldsymbol{\left(-2+\sqrt{3},1\right),\left(-2-\sqrt{3},1\right)}$ …**答え**

②の漸近線 $y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$

平行移動して, $\boldsymbol{y-1=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x+2)}$ …**答え**