

反射テスト 曲線 楕円 01

1. 次の楕円の焦点の座標を求めよ。(S級2分, A級3分, B級5分, C級8分)

(1) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

(2) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$

(3) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{169} = 1$

(4) $2x^2 - 12x + y^2 = 0$

2. 次の楕円の焦点の座標を求めよ。(S級3分, A級5分, B級8分, C級12分)

$$(1) \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{15} = 1$$

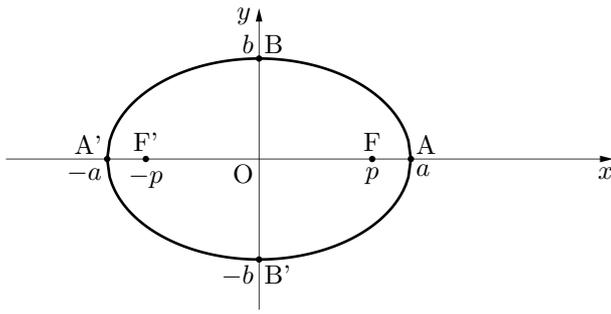
$$(2) \quad \frac{(x-1)^2}{5} + y^2 = 1$$

$$(3) \quad \frac{(x-3)^2}{21} + \frac{(y+2)^2}{5} = 1$$

$$(4) \quad 9x^2 + 9x + 16y^2 - 16y + 6 = 0$$

反射テスト 曲線 楕円 01 解答解説

1. 次の楕円の焦点の座標を求めよ。(S級2分, A級3分, B級5分, C級8分)



★横長の楕円の方程式 ($a > b > 0$)

x 軸上の定点 $F(p, 0)$, $F'(-p, 0)$ に対して,
 $PF + PF' = 2a$ を満たす動点 $P(x, y)$ の軌跡の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{と表すことができる.}$$

頂点 $\sim A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$, $B'(0, -b)$

このとき, F, F' を焦点といい, 焦点 F, F' の座標は,

$$F(\sqrt{a^2 - b^2}, 0), F'(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \text{ となる.}$$

☆イメージ 直角三角形 OFB の斜辺 $FB = OA \Rightarrow p^2 + b^2 = a^2 \Rightarrow p = \sqrt{a^2 - b^2}$

★縦長の楕円の方程式 ($b > a > 0$)

y 軸上の定点 $F(0, p)$, $F'(0, -p)$ に対して, $PF + PF' = 2b$ を満たす動点 $P(x, y)$ の軌跡の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ と表すことができ, 焦点 } F, F' \text{ の座標は, } F(0, \sqrt{b^2 - a^2}), F'(0, -\sqrt{b^2 - a^2}) \text{ となる.}$$

☆ $a = b$ のとき, 楕円の方程式は円を表し, 焦点は円の中心である原点と一致する.

(1) $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

$5 > 4$ より, 横長の楕円である.

$$\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

\Rightarrow 焦点の座標は $(\pm 3, 0)$ …答え

(2) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{5}^2} = 1$$

$\sqrt{3} < \sqrt{5}$ より, 縦長の楕円である.

$$\sqrt{\sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{2}$$

\Rightarrow 焦点の座標は $(0, \pm\sqrt{2})$ …答え

(3) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{169} = 1$ …①

$$\Rightarrow \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{13^2} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$5 < 13$ より, 縦長の楕円である.

$$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \Rightarrow \textcircled{2} \text{ の焦点 } (0, \pm 12)$$

楕円①は楕円②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向 } -2 \\ y \text{ 軸方向 } +4 \end{cases}$ 平行移動したもの

\Rightarrow 焦点も平行移動して, 焦点 $(0 - 2, \pm 12 + 4)$

\Rightarrow ①の焦点 $(-2, 16), (-2, -8)$ …答え

(4) $2x^2 - 12x + y^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)^2 + y^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1 \quad \textcircled{2}$$

$3 < 3\sqrt{2}$ より, 縦長の楕円である.

$$\sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3 \Rightarrow \textcircled{2} \text{ の焦点 } (0, \pm 3)$$

楕円①は楕円②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向 } +3 \\ y \text{ 軸方向 } \pm 0 \end{cases}$ 平行移動したもの

\Rightarrow 焦点も平行移動して, 焦点 $(0 + 3, \pm 3 \pm 0)$

\Rightarrow ①の焦点 $(3, 3), (3, -3)$ …答え

2. 次の楕円の焦点の座標を求めよ。(S級3分, A級5分, B級8分, C級12分)

$$(1) \quad \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{15} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{15}^2} = 1$$

$\sqrt{3} < \sqrt{15}$ より, 縦長の楕円である.

$$\sqrt{\sqrt{15}^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

\Rightarrow 焦点の座標は $(0, \pm 2\sqrt{3})$ …答え

$$(2) \quad \frac{(x-1)^2}{5} + y^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{5}^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\sqrt{5} > 1$ より, 横長の楕円である.

$$\sqrt{\sqrt{5}^2 - 1^2} = 2 \Rightarrow \textcircled{2} \text{ の焦点 } (\pm 2, 0)$$

楕円①は楕円②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向 } +1 \\ y \text{ 軸方向 } \pm 0 \end{cases}$ 平行移動したもの

\Rightarrow 焦点も平行移動して, 焦点 $(\pm 2 + 1, 0 \pm 0)$

\Rightarrow ①の焦点 $(3, 0), (-1, 0)$ …答え

$$(3) \quad \frac{(x-3)^2}{21} + \frac{(y+2)^2}{5} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{21}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{5}^2} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\sqrt{21} > \sqrt{5}$ より, 横長の楕円である.

$$\sqrt{\sqrt{21}^2 - \sqrt{5}^2} = 4 \Rightarrow \textcircled{2} \text{ の焦点 } (\pm 4, 0)$$

楕円①は楕円②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向 } +3 \\ y \text{ 軸方向 } -2 \end{cases}$ 平行移動したもの

\Rightarrow 焦点も平行移動して, 焦点 $(\pm 4 + 3, 0 - 2)$

\Rightarrow ①の焦点 $(7, -2), (-1, -2)$ …答え

$$(4) \quad 9x^2 + 9x + 16y^2 - 16y + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 16\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$\frac{1}{6} > \frac{1}{8}$ より, 横長の楕円である.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{24} \Rightarrow \textcircled{2} \text{ の焦点 } \left(\pm \frac{\sqrt{7}}{24}, 0\right)$$

楕円①は楕円②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向 } -\frac{1}{2} \\ y \text{ 軸方向 } +\frac{1}{2} \end{cases}$ 平行移動したもの

\Rightarrow 焦点も平行移動して, 焦点 $\left(\pm \frac{\sqrt{7}}{24} - \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}\right)$

\Rightarrow ①の焦点 $\left(\frac{\sqrt{7}}{24} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{7}}{24} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ …答え