# 反射テスト　曲線　楕円　01

**1.**　次の楕円の焦点の座標を求めよ.（ $S$ 級 2 分, $A$ 級 3 分, $B$ 級 5 分, $C$ 級 8 分 ）

（1）　$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$

（2）　$\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{5}=1$

（3）　$\dfrac{(x+2)^2}{25}+\dfrac{(y-4)^2}{169}=1$

（4）　$2x^2-12x+y^2=0$

**2.** 次の楕円の焦点の座標を求めよ.（ $S$ 級 3 分, $A$ 級 5 分, $B$ 級 8 分, $C$ 級 12 分 ）

(1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{15}=1$

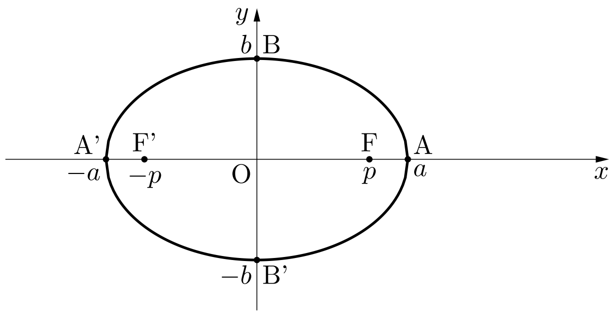
(2) $\dfrac{(x-1)^2}{5}+y^2=1$

(3) $\dfrac{(x-3)^2}{21}+\dfrac{(y+2)^2}{5}=1$

(4) $9x^2+9x+16y^2-16y+6=0$

# 反射テスト　曲線　楕円　01　解答解説

**1.**　次の楕円の焦点の座標を求めよ.（ $S$ 級 2 分, $A$ 級 3 分, $B$ 級 5 分, $C$ 級 8 分 ）




**★ 横長の楕円の方程式　( $a > b > 0$ )**

$x$ 軸上の定点 F$(p, 0)$ , F'$(-p, 0)$ に対して,
PF + PF$'$ $= 2a$ を満たす動点 P$(x, y)$ の軌跡の方程式は,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ と表すことができる.

頂点〜A$(a, 0)$ , A'$(-a, 0)$ , B$(0, b)$ , B'$(0, -b)$

このとき, F,F' を焦点といい, 焦点 F,F' の座標は,
$\mathbf{F}\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ , $\mathbf{F'}\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ となる.

☆イメージ　直角三角形 OFB の斜辺 FB = OA
$\Rightarrow$　$p^2 + b^2 = a^2$　$\Rightarrow$　$p = \sqrt{a^2 - b^2}$

**★ 縦長の楕円の方程式　( $b > a > 0$ )**

$y$ 軸上の定点 F$(0, p)$ , F'$(0, -p)$ に対して, PF + PF$'$ $= 2b$　を満たす動点 P$(x, y)$ の軌跡の方程式は,
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ と表すことができ, 焦点 F,F' の座標は, $\mathbf{F}\left(0, \sqrt{b^2 - a^2}\right)$ , $\mathbf{F'}\left(0, -\sqrt{b^2 - a^2}\right)$ となる.

☆ $a = b$ のとき, 楕円の方程式は円を表し, 焦点は円の中心である原点と一致する.

(1)　$\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$

$5 > 4$ より, 横長の楕円である.
$\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$\Rightarrow$　焦点の座標は $(\pm 3, 0)$　…**答え**

(2)　$\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{5} = 1$

$\Leftrightarrow$　$\dfrac{x^2}{\sqrt{3}^2} + \dfrac{y^2}{\sqrt{5}^2} = 1$

$\sqrt{3} < \sqrt{5}$より, 縦長の楕円である.
$\sqrt{\sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow$　焦点の座標は $(0, \pm\sqrt{2})$　…**答え**

(3)　$\dfrac{(x+2)^2}{25} + \dfrac{(y-4)^2}{169} = 1$　…①

$\Rightarrow$　$\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{13^2} = 1$　…②

$5 < 13$ より, 縦長の楕円である.
$\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$　$\Rightarrow$　②の焦点 $(0, \pm 12)$

楕円①は楕円②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向} -2 \\ y \text{ 軸方向} +4 \end{cases}$ 平行移動したもの
$\Rightarrow$　焦点も平行移動して, 焦点 $(0-2, \pm 12 + 4)$

$\Rightarrow$　①の焦点 $(-2, 16), (-2, -8)$　…**答え**

(4)　$2x^2 - 12x + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow$　$2(x-3)^2 + y^2 = 18$

$\Leftrightarrow$　$\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{18} = 1$　…①

$\Rightarrow$　$\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$　②

$3 < 3\sqrt{2}$より, 縦長の楕円である.
$\sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3$　$\Rightarrow$　②　の焦点 $(0, \pm 3)$

楕円①は楕円②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向} +3 \\ y \text{ 軸方向} \pm 0 \end{cases}$ 平行移動したもの
$\Rightarrow$　焦点も平行移動して, 焦点 $(0+3, \pm 3 \pm 0)$

$\Rightarrow$　①の焦点 $(3, 3), (3, -3)$　…**答え**

**2.** 次の楕円の焦点の座標を求めよ.（ $S$ 級 3 分, $A$ 級 5 分, $B$ 級 8 分, $C$ 級 12 分 ）

(1) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{15}=1$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{x^2}{\sqrt{3}^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{15}^2}=1$

$\sqrt{3}<\sqrt{15}$より, 縦長の楕円である.

$\sqrt{\sqrt{15}^2-\sqrt{3}^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ 焦点の座標は $\mathbf{(0,\pm 2\sqrt{3})}$ **…答え**

(2) $\dfrac{(x-1)^2}{5}+y^2=1 \quad \cdots ①$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{\sqrt{5}^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1 \quad \cdots ②$

$\sqrt{5}>1$ より, 横長の楕円である.

$\sqrt{\sqrt{5}^2-1^2}=2 \quad \Rightarrow$ ② の焦点 $(\pm 2,0)$

楕円①は楕円②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向} +1 \\ y \text{ 軸方向} \pm 0 \end{cases}$ 平行移動したもの

$\Rightarrow$ 焦点も平行移動して, 焦点 $(\pm 2+1, 0\pm 0)$

$\Rightarrow$ ①の焦点 $\mathbf{(3,0),(-1,0)}$ **…答え**

(3) $\dfrac{(x-3)^2}{21}+\dfrac{(y+2)^2}{5}=1 \quad \cdots ①$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{\sqrt{21}^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{5}^2}=1 \quad \cdots ②$

$\sqrt{21}>\sqrt{5}$より, 横長の楕円である.

$\sqrt{\sqrt{21}^2-\sqrt{5}^2}=4 \quad \Rightarrow$ ② の焦点 $(\pm 4,0)$

楕円①は楕円②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向} +3 \\ y \text{ 軸方向} -2 \end{cases}$ 平行移動したもの

$\Rightarrow$ 焦点も平行移動して, 焦点 $(\pm 4+3, 0-2)$

$\Rightarrow$ ①の焦点 $\mathbf{(7,-2),(-1,-2)}$ **…答え**

(4) $9x^2+9x+16y^2-16y+6=0$

$\Leftrightarrow \quad 9\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+16\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}+\dfrac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2}=1 \quad \cdots ①$

$\Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{8}\right)^2}=1 \quad \cdots ②$

$\frac{1}{6}>\frac{1}{8}$より, 横長の楕円である.

$\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{24} \quad \Rightarrow$ ②の焦点 $\left(pm\frac{\sqrt{7}}{24},0\right)$

楕円①は楕円②を $\begin{cases} x \text{ 軸方向} -\frac{1}{2} \\ y \text{ 軸方向} +\frac{1}{2} \end{cases}$ 平行移動したもの

$\Rightarrow$ 焦点も平行移動して, 焦点 $\left(\pm\frac{\sqrt{7}}{24}-\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow$ ①の焦点 $\left(\mathbf{\frac{\sqrt{7}}{24}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right),\left(\mathbf{-\frac{\sqrt{7}}{24}-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\right)$ **…答え**