反射テスト　極限　いろいろ　02

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1)　$\displaystyle \lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{x}$

(2)　$\displaystyle \lim_{x\to\infty}\left(\log_{10}\frac{1}{5}\right)^{2x}$

(3)　$\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5}{3x+1}$

(4)　$\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{2x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\log_2\frac{1}{3}\right)^{2x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{1-2x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{2x}$

反射テスト　極限　いろいろ　02　解答解説

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{x}$

☆ $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと,
$x\to\infty \quad\Rightarrow\quad y\to+0$

$$与式=\lim_{y\to+0}\frac{1}{y}\cdot\tan y$$
$$=\lim_{y\to+0}\frac{\tan y}{y}=\mathbf{1}\quad \textbf{…答え}$$

★ **公式**　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

☆ $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと,「 $x\to\infty \quad\Rightarrow\quad y\to+0$ 」
「＋」に注意.

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\log_{10}\frac{1}{5}\right)^{2x}$

$$\log_{10}\frac{1}{10}<\log_{10}\frac{1}{5}<\log_{10}1$$
$$\Leftrightarrow\quad -1<\log_{10}\frac{1}{5}<0$$

$\therefore$　与式 $=\mathbf{0}$　**…答え**

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5}{3x+1}$

$y=-x$ とおくと,

$$与式=\lim_{y\to\infty}\frac{2(-y)^2+5}{3\cdot(-y)+1}$$
$$=\lim_{y\to\infty}\frac{2y^2+5}{-3y+1}$$
$$=\lim_{y\to\infty}\frac{2y+\frac{5}{y}}{-3+\frac{1}{y}}$$
$$=-\infty\quad \textbf{…答え}$$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

$e^x=y$ とおくと, $x=\log y$
$x\to 0$ ならば $y\to 1$

$$与式=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\log y}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\log(z+1)}\quad \leftarrow y=z+1 \text{ とおいた}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\frac{1}{z}\log(z+1)}$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\log(1+z)^{\frac{1}{z}}}$$
$$=\frac{1}{\log e}=\mathbf{1}\quad \textbf{…答え}$$

★ **ネイピア数の定義**　$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

★ **公式**　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$
この問題は頻出なので覚えておくとよい.

★微分がわかるなら, $f(x)=e^x$ とおいて,
与式 $=\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=1$
この形で覚えておくと一石二鳥にも三鳥にもなる. ちなみに $y=e^x$ の $x=0$ の接線の傾きが 1 という意味もある.

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 2 分 40 秒, B 級 4 分, C 級 6 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{2x}$

☆ $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと,

$x\to\infty \quad\Rightarrow\quad y\to+0$

$$与式=\frac{1}{2}\lim_{y\to+0}\frac{2}{y}\cdot\tan\frac{y}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\frac{y}{2}\to+0}\frac{\tan\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}=\mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \textbf{…答え}$$

★ 公式 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$

☆ $y=\dfrac{1}{x}$ とおくと,「 $x\to\infty \quad\Rightarrow\quad y\to+0$ 」

「＋」に注意.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\log_2\frac{1}{3}\right)^{2x}$

$$\log_2\frac{1}{3}<\log_2\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \log_2\frac{1}{3}<-1$$

$$\therefore\quad 与式=\left\{\lim_{x\to\infty}\left(\log_2\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2$$

$$=\infty \qquad \textbf{…答え}$$

☆ 2 乗があるから振動ではなく発散.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{1-2x}$

$y=-x$ とおくと,

$$与式=\lim_{y\to\infty}\frac{1+(-y)^2}{1-2\cdot(-y)}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{1+y^2}{1+2y}$$

$$=\lim_{y\to\infty}\frac{\frac{1}{y}+y}{\frac{1}{y}+2}$$

$$=\infty \qquad \textbf{…答え}$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{2x}$

$e^x=y$ とおくと, $x=\log y$

$x\to0$ ならば $y\to1$

$$与式=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x-1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{y\to1}\frac{y-1}{\log y}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{z}{\log(z+1)} \qquad \leftarrow y=z+1 \text{ とおいた}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{1}{\frac{1}{z}\log(z+1)}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{z\to0}\frac{1}{\log(1+z)^{\frac{1}{z}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log e}=\mathbf{-\frac{1}{2}} \qquad \textbf{…答え}$$

★ ネイピア数の定義 $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

★ 公式 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

で早く解いてもよい.