反射テスト　極限　階乗と指数関数　01

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 9 分 ）

（1）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$

（2）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{n!}$　ただし, e はネイピア数.

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 10 分 ）

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$ ただし, a は正の実数.

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$

反射テスト　極限　階乗と指数関数　01　解答解説

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分, C 級 9 分 ）

★ はさみうちの原理

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$ に対して, x が a に近いとき, 常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ であれば, $\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$ である.

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}$

十分大きな n に対して,

$$0 \leqq \frac{2^n}{n!} \leqq \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{n} = \frac{4}{n}$$

$n \to \infty$ のとき　$\dfrac{4}{n} \to 0$

はさみうちの原理から,　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = \mathbf{0}$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!}$　ただし, e はネイピア数.

ネイピア数 $e < 3$ であるから,
十分大きな n に対して,

$$0 \leqq \frac{e^n}{n!} \leqq \frac{3^n}{n!} \leqq \frac{3}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{3}{n} = \frac{3^3}{2n}$$

$n \to \infty$ のとき　$\dfrac{3^3}{2n} \to 0$

はさみうちの原理から,　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n!} = \mathbf{0}$

☆指数関数は整式より爆発的に大きくなる. そして階乗は指数関数よりも爆発力がある.
こういう言い方が数学的には許されないが, 指数関数は整式より強いというイメージを持って欲しい.
　例　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{1000}}{2^x} = 0$
そして, 階乗は指数関数よりも強いことが上の問題からわかる.

2.　次の極限値を求めよ.（ S 級 3 分 30 秒, A 級 6 分, B 級 8 分, C 級 10 分 ）

★ はさみうちの原理

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \alpha$ に対して，x が a に近いとき，常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ であれば，$\lim_{x \to a} h(x) = \alpha$ である.

(1)　$\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!}$　ただし，a は正の実数.

自然数 $m = [a] + 1$ とおくと，
m より十分大きな n に対して，

$$\begin{aligned} 0 \leqq \frac{a^n}{n!} &\leqq \frac{m^n}{n!} \\ &\leqq \frac{m}{1} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{m}{m-1} \cdot \frac{m}{m} \cdot \frac{m}{m} \cdot \cdots \cdot \frac{m}{m} \cdot \frac{m}{n} \\ &= \frac{m^m}{(m-1)!n} \end{aligned}$$

$n \to \infty$ のとき　$\displaystyle \frac{m^m}{(m-1)!n} \to 0$

はさみうちの原理から，　$\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = \mathbf{0}$

(2)　$\displaystyle \lim_{n \to \infty} \frac{n^n}{n!}$

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n}{1} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{n}{n}$$

$\frac{n}{1}, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \cdots,$ が 1 以上であるから，
これは $n \to \infty$ のとき **発散する**.

☆ n^nでやっと n の階乗より強くなる.