反射テスト　極限　ダランベールの収束判定法　01

1.　自然数 n に対する次の数列の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するか，発散するかを言え．

（ S 級 1 分 20 秒，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 4 分 20 秒 ）

(1)　$a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$

(2)　$a_n = \dfrac{e^n}{n!}$　ただし，e はネイピア数．

2. 自然数 n に対する次の数列の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するか，発散するかを言え．

（ S 級 1 分 20 秒，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 4 分 20 秒 ）

(1) $a_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$

(2) $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ ただし，x は実数

反射テスト　極限　ダランベールの収束判定法　01　解答解説

1.　自然数 n に対する次の数列の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するか，発散するかを言え．

（ S 級 1 分 20 秒，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 4 分 20 秒 ）

★ 級数 (*series*)　数列の無限項の和．

数列 a_n の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$

★ ダランベールの収束判定法 (*ratio test*)

・$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ であれば，数列 a_n の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する．

・$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ であれば，級数は発散する．

・$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ のときは，収束・発散・振動のどれとも言えない．

(1)　$a_n = \frac{2^n}{n^2}$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} \\ &= \frac{2n^2}{n^2+2n+1} \\ &= \frac{2}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{2}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 2 \qquad \therefore \textbf{発散}\end{aligned}$$

☆指数関数は整式より爆発的に大きくなる．強い関数・弱い関数参照．
こういう言い方が数学的には許されないが，指数関数は整式より強いというイメージを持って欲しい．

(2)　$a_n = \frac{e^n}{n!}$　ただし，e はネイピア数．

$$a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{e^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{e^n} \\ &= \frac{e}{n+1} \\ &= 0 \qquad \therefore \textbf{収束}\end{aligned}$$

☆階乗は指数関数よりも爆発力がある．

2. 自然数 n に対する次の数列の級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するか，発散するかを言え．

（S 級 1 分 20 秒，A 級 2 分，B 級 3 分，C 級 4 分 20 秒）

(1) $a_n = \dfrac{2^n}{n^{100}}$

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{100}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{100}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n} \\ &= \frac{2n^{100}}{(n+1)^{100}} \\ &= \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{100}} = 2 \qquad \therefore \textbf{発散}\end{aligned}$$

(2) $a_n = \dfrac{x^n}{n!}$ ただし，x は実数

$$a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \\ &= \frac{x}{n+1} \\ &= 0 \qquad \therefore \textbf{収束}\end{aligned}$$