

## 反射テスト 極限 はさみうちの原理 01

1. 次の極限值を求めよ。(S級2分30秒, A級4分, B級6分, C級8分)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$

2. 次の極限值を求めよ。(S級3分, A級5分, B級7分30秒, C級10分)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\log x)$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$

## 反射テスト 極限 はさみうちの原理 01 解答解説

1. 次の極限値を求めよ。(S級2分30秒, A級4分, B級6分, C級8分)

### ★ はさみうちの原理

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$  に対して,  $x$  が  $a$  に近いとき, 常に  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  であれば,  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \alpha$  である.

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$$

$$0 \leq \left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1 \text{ かつ } |x| \geq 0 \text{ より,}$$

$$0 \cdot |x| \leq \left| \cos \frac{1}{x} \right| \cdot |x| \leq 1 \cdot |x| \Leftrightarrow 0 \leq \left| x \cos \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理より, } \lim_{x \rightarrow 0} \left| x \cos \frac{1}{x} \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0 \quad \dots \text{答え}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$x > 0 \text{ において, } 0 \leq |\sin x| \leq 1 \text{ かつ } |x| > 0 \text{ より,}$$

$$\frac{0}{|x|} \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow 0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0 \text{ であるから, はさみうちの原理より, } \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \dots \text{答え}$$

2. 次の極限值を求めよ。(S級3分, A級5分, B級7分30秒, C級10分)

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\log x)$$

$0 \leq |\sin(\log x)| \leq 1$  かつ  $|x| \geq 0$  より,

$$0 \cdot |x| \leq |\sin(\log x)| \cdot |x| \leq 1 \cdot |x| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq |x \sin(\log x)| \leq |x|$$

$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  であるから, はさみうちの原理より,  $\lim_{x \rightarrow 0} |x \sin(\log x)| = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(\log x) = 0 \quad \cdots \text{答え}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x}$$

$y = -x$  とおくと,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos x}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\cos(-y)}{-y} = - \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\cos y}{y} \quad \cdots \text{①}$$

$y > 0$  において,  $0 \leq |\cos y| \leq 1$  かつ  $|y| > 0$  より,

$$\frac{0}{|y|} \leq \frac{|\cos y|}{|y|} \leq \frac{1}{|y|} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \left| \frac{\cos y}{y} \right| \leq \frac{1}{|y|}$$

$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{|y|} = 0$  であるから, はさみうちの原理より,  $\lim_{y \rightarrow \infty} \left| \frac{\cos y}{y} \right| = 0 \quad \cdots \text{②}$

$$\text{①, ② から, } \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\cos y}{y} = 0 \quad \cdots \text{答え}$$