反射テスト　極限　はさみうちの原理　01

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$

（2）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分 30 秒, C 級 10 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin(\log x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos x}{x}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　極限　はさみうちの原理　01　解答解説

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 8 分 ）

★ はさみうちの原理

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \alpha$ に対して, x が a に近いとき, 常に $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$ であれば, $\lim_{x\to a} h(x) = \alpha$ である.

(1)　$\lim_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$

$0 \leqq \left|\cos\dfrac{1}{x}\right| \leqq 1$ かつ $|x| \geqq 0$ より,

$0\cdot|x| \leqq \left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\cdot|x| \leqq 1\cdot|x| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqq \left|x\cos\dfrac{1}{x}\right| \leqq |x|$

$\lim_{x\to 0}|x| = 0$ であるから, はさみうちの原理より, $\lim_{x\to 0}\left|x\cos\dfrac{1}{x}\right| = 0$

$\therefore \quad \lim_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = \mathbf{0}$

(2)　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

$x > 0$ において, $0 \leqq |\sin x| \leqq 1$ かつ $|x| > 0$ より,

$\dfrac{0}{|x|} \leqq \dfrac{|\sin x|}{|x|} \leqq \dfrac{1}{|x|} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqq \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqq \dfrac{1}{|x|}$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{|x|} = 0$ であるから, はさみうちの原理より, $\lim_{x\to\infty}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| = 0$

$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = \mathbf{0}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 3 分, A 級 5 分, B 級 7 分 30 秒, C 級 10 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin(\log x)$

$0 \leqq |\sin(\log x)| \leqq 1$ かつ $|x| \geqq 0$ より,

$0\cdot|x| \leqq |\sin(\log x)|\cdot|x| \leqq 1\cdot|x| \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqq |x\sin(\log x)| \leqq |x|$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}|x| = 0$ であるから, はさみうちの原理より, $\displaystyle\lim_{x\to 0}|x\sin(\log x)| = 0$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin(\log x) = \mathbf{0}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\cos x}{x}$

$y = -x$ とおくと,

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\cos x}{x} = \lim_{y\to\infty}\frac{\cos(-y)}{-y} = -\lim_{y\to\infty}\frac{\cos y}{y} \quad \cdots ①$

$y > 0$ において, $0 \leqq |\cos y| \leqq 1$ かつ $|y| > 0$ より,

$\displaystyle\frac{0}{|y|} \leqq \frac{|\cos y|}{|y|} \leqq \frac{1}{|y|} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqq \left|\frac{\cos y}{y}\right| \leqq \frac{1}{|y|}$

$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{1}{|y|} = 0$ であるから, はさみうちの原理より, $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\left|\frac{\cos y}{y}\right| = 0 \quad \cdots ②$

①, ② から, $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{\cos y}{y} = \mathbf{0}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）