反射テスト　極限　数列　部分分数分解　01

1.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

（1）　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

（2）　$\displaystyle\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots$

2. 次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分 30 秒, C 級 9 分 ）

（1） $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

（2） $\dfrac{2}{1\cdot 3}+\dfrac{2}{2\cdot 4}+\dfrac{2}{3\cdot 5}+\cdots$

反射テスト　極限　数列　部分分数分解　01　解答解説

1.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分 10 秒, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

★ 部分分数分解　…通分の逆算

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{1}}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-0=\mathbf{1}\quad\text{…答え}$$

★ **無限級数 $=\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ (第 n 部分和)**

第 n 部分和 $\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)$ を求めたあとは, n に ∞ を代入.

☆分子の数字をどう扱うか注意が必要である. この場合は前に出す係数はない.

(2)　$\dfrac{1}{2\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot6}+\dfrac{1}{6\cdot8}+\cdots$

$$=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3\cdot4}+\cdots$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\right)\qquad\left(=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\mathbf{\frac{1}{4}}\quad\text{…答え}$$

☆第 n 項の決定の仕方（同じ数字を見つける）
$\dfrac{1}{4}\cdot$(　～　) の (　) の中について考える.
第 **1** 項が $\dfrac{1}{\mathbf{1}\cdot2}$, 第 **2** 項が $\dfrac{1}{\mathbf{2}\cdot3}$, 第 **3** 項が $\dfrac{1}{\mathbf{3}\cdot4}$, …　である.
よって, 分母の積の左側の数字に注目して, 第 $\boldsymbol{n}$ 項が $\dfrac{1}{\boldsymbol{n}(n+1)}$ であると考える.

2.　次の計算をせよ.（ S 級 1 分 40 秒, A 級 4 分, B 級 6 分 30 秒, C 級 9 分 ）

(1)　$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{n+1}{(n-1)(n+1)} - \frac{n-1}{(n-1)(n+1)}\right\} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-2}} - \frac{1}{n}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$　…答え

(2)　$\dfrac{2}{1\cdot 3} + \dfrac{2}{2\cdot 4} + \dfrac{2}{3\cdot 5} + \cdots$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$　…答え

☆第 n 項の決定の仕方（同じ数字を見つける）
第 **1** 項が $\dfrac{2}{\mathbf{1}\cdot 3}$, 第 **2** 項が $\dfrac{2}{\mathbf{2}\cdot 4}$, 第 **3** 項が $\dfrac{2}{\mathbf{3}\cdot 5}$,　…　である.
よって, 分母の積の左側の数字に注目して, 第 $\boldsymbol{n}$ 項が $\dfrac{2}{\boldsymbol{n}(n+2)}$ であると考える.

★ $\dfrac{2}{n(n+2)} = \dfrac{(n+2)-n}{n(n+2)} = \dfrac{n+2}{n(n+2)} - \dfrac{n}{n(n+2)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}$

★ **無限級数 ＝** $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}}$ **(第 $\boldsymbol{n}$ 部分和)**
第 n 部分和 $\left(1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$ を求めたあとは, n に ∞ を代入.

☆次のように考えてもよい.
この考え方は応用がきくが, 発散するか収束するかわかりにくいので注意が必要.

$$\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 5} + \cdots = \frac{3-1}{1\cdot 3} + \frac{4-2}{2\cdot 4} + \frac{5-3}{3\cdot 5} + \cdots$$

$$= \left(\frac{3}{1\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 3}\right) + \left(\frac{4}{2\cdot 4} - \frac{2}{2\cdot 4}\right) + \left(\frac{5}{3\cdot 5} - \frac{3}{3\cdot 5}\right) + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$