反射テスト　極限　強い関数・弱い関数　01

1.　次の極限値を求めよ. 結果のみでよい.（ S 級 10 秒, A 級 20 秒, B 級 35 秒, C 級 1 分 ）

(1)　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$

(2)　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x}$

2. 次の極限値を求めよ. 結果のみでよい.（ S 級 10 秒, A 級 20 秒, B 級 35 秒, C 級 1 分 ）

(1) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{1.0001^x}{x^{10000}}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\log_{1.1} x}{x^{0.1}}$

反射テスト　極限　強い関数・弱い関数　01　解答解説

1.　次の極限値を求めよ. 結果のみでよい.（S 級 10 秒, A 級 20 秒, B 級 35 秒, C 級 1 分）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$

分子は整式, 分母は指数関数.
分母の方が強いので, 分子 $<$ 分母.
よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0}$

証明
$lemma$(補題)　$e^x>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$
　$f(x)=e^x-1-x-\dfrac{1}{2}x^2$ とおく.
　$f'(x)=e^x-1-x$
　$f''(x)=e^x-1$
$f'(0)=0$ かつ $x>0$ において $f''(x)>0$ であるから, $f'(x)>0$
$f(0)=0$ かつ $x>0$ において $f'(x)>0$ であるから, $f(x)>0$

$x>0$ のとき, $lemma$ の両辺を x で割って,

$$\frac{e^x}{x}>\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2}{x}$$

$$\Rightarrow\quad 0<\frac{x}{e^x}<\frac{x}{1+x+\frac{1}{2}x^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad 0<\frac{x}{e^x}<\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}$$

$x\to\infty$ のとき, $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}\to 0$ であるから, はさみうちの原理より, $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0}$

☆指数関数は整式より爆発的に大きくなる.
整式とは, $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ の形で表される数式である.
強い・弱いという言い方が数学的には許されない乱暴な表現だが, イメージをつかむのに役立つ.
指数関数は整式より強いというイメージを持って欲しい. 指数関数は正に発散する基本関数の中で最強.
曽呂利新左衛門 (そろりしんざえもん) と豊臣秀吉の話を知っている人も多いだろう.

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$

分子は対数関数, 分母は整式.
分母の方が強いので, 分子 $<$ 分母.
よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0}$

証明
$t=\log x$ とおくと, $e^t=x$ かつ $x\to\infty$ のとき, $t\to\infty$
これを与式に代入すると,
　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}$
1(1) の結果から, これは $\mathbf{0}$ に収束する.

☆対数関数は整式よりゆっくりと無限大に近く.
対数関数は整式より弱い. 対数関数は正に発散する基本関数の中で最弱.

2. 次の極限値を求めよ．結果のみでよい．(S 級 10 秒，A 級 20 秒，B 級 35 秒，C 級 1 分)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1.0001^x}{x^{10000}}$

分子は指数関数，分母は整式．
分子の方が強いので，分子 $>$ 分母．
よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1.0001^x}{x^{10000}}=\infty$

★ $a>1$，$n>0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty$
証明
$y=\dfrac{x\log a}{n}$ とおくと，$x=\dfrac{ny}{\log a}$ であるから，
$a^x=\left(e^{\log a}\right)^x=e^{x\log a}$

$$\frac{a^x}{x^n}=\left(\frac{a^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n=\left(\frac{e^{\frac{x\log a}{n}}}{x}\right)^n=\left(\frac{e^y}{\frac{ny}{\log a}}\right)^n=\left(\frac{\log a}{n}\right)^n\left(\frac{e^y}{y}\right)^n$$

$x\to\infty$ のとき $y\to\infty$
1(1) より，$\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y}=0$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty$
ということで，2(1) も発散する．

☆指数関数は整式より爆発的に大きくなる．
たとえ，x^{10000}であろうと，1.0001^x に勝てないということ．

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_{1.1}x}{x^{0.1}}$

分子の対数関数が弱いので，分子 $<$ 分母．
よって $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_{1.1}x}{x^{0.1}}=0$

★ $a>1$，$n>0$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^n}=0$
証明
$a^z=x^n$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $z\to\infty$ かつ
$\log_a x=\dfrac{z}{n}$ であるから，2(1) の★を用いて次のように証明できる．

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^n}=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{z}{n}}{a^z}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{z}{a^z}=0$$

☆対数関数は整式よりゆっくりと無限大に近く．
たとえ，$\log_{1.1}x$ であろうと，$x^{0.1}$ に勝てないということ．
ちなみに $\log_{1.1}x$ が 100 を超えるのは x が 10000 ちょっとあたり．$x^{0.1}$ が 100 を超えるのは x が 21 桁くらいになる．
とても逆転できそうにないが，x の桁が 30 桁になるまでには逆転する．