反射テスト　極限　強い関数・弱い関数　01

1.　次の極限値を求めよ. 結果のみでよい.（ S 級 10 秒, A 級 20 秒, B 級 35 秒, C 級 1 分 ）

（1）　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$

（2）　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\log x}{x}$

2. 次の極限値を求めよ．結果のみでよい．（ S 級 10 秒，A 級 20 秒，B 級 35 秒，C 級 1 分 ）

(1) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{1.0001^x}{x^{10000}}$

(2) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{\log_{1.1} x}{x^{0.1}}$

反射テスト　極限　強い関数・弱い関数　01　解答解説

1.　次の極限値を求めよ. 結果のみでよい.（ S 級 10 秒, A 級 20 秒, B 級 35 秒, C 級 1 分 ）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$

分子は整式, 分母は指数関数.
分母の方が強いので, 分子 $<$ 分母 .
よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0}$

証明
lemma(補題)　$e^x > 1+x+\dfrac{1}{2}x^2$

$f(x)=e^x-1-x-\dfrac{1}{2}x^2$ とおく.
$f'(x)=e^x-1-x$
$f''(x)=e^x-1$
$f'(0)=0$ かつ $x>0$ において $f''(x)>0$ であるから, $f'(x)>0$
$f(0)=0$ かつ $x>0$ において $f'(x)>0$ であるから, $f(x)>0$

$x>0$ のとき, lemma の両辺を x で割って,

$$6\frac{e^x}{x} > \frac{1+x+\frac{1}{2}x^2}{x}$$
$$\Rightarrow\quad 0<\frac{x}{e^x}<\frac{x}{1+x+\frac{1}{2}x^2}$$
$$\Leftrightarrow\quad 0<\frac{x}{e^x}<\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}$$

$x\to\infty$ のとき, $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}\to 0$ であるから, はさみうちの原理より, $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0}$

☆指数関数は整式より爆発的に大きくなる.
整式とは, $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ の形で表される数式である.
強い・弱いという言い方が数学的には許されない乱暴な表現だが, イメージをつかむのに役立つ.
指数関数は整式より強いというイメージを持って欲しい. 指数関数は正に発散する基本関数の中で最強.
曽呂利新左衛門 (そろりしんざえもん) と豊臣秀吉の話を知っている人も多いだろう.

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$

分子は対数関数, 分母は整式.
分母の方が強いので, 分子 $<$ 分母 .
よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0}$

証明
$t=\log x$ とおくと, $e^t=x$ かつ $x\to\infty$ のとき, $t\to\infty$
これを与式に代入すると,
$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}$
1(1) の結果から, これは $\boldsymbol{0}$ に収束する.

☆対数関数は整式よりゆっくりと無限大に近く.
対数関数は整式より弱い. 対数関数は正に発散する基本関数の中で最弱.

2.　次の極限値を求めよ. 結果のみでよい.（ S 級 10 秒, A 級 20 秒, B 級 35 秒, C 級 1 分 ）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1.0001^x}{x^{10000}}$

分子は指数関数, 分母は整式.
分子の方が強いので, 分子 $>$ 分母 .
よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{1.0001^x}{x^{10000}}=\infty}$

★ $\boldsymbol{a>1}$, $\boldsymbol{n>0}$ のとき $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty}$
証明
$y=\dfrac{x\log a}{n}$ とおくと, $x=\dfrac{ny}{\log a}$ であるから,
$a^x=\left(e^{\log a}\right)^x=e^{x\log a}$
$\dfrac{a^x}{x^n}=\left(\dfrac{a^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n=\left(\dfrac{e^{\frac{x\log a}{n}}}{x}\right)^n=\left(\dfrac{e^y}{\frac{ny}{\log a}}\right)^n=\left(\dfrac{\log a}{n}\right)^n\left(\dfrac{e^y}{y}\right)^n$
$x\to\infty$ のとき $y\to\infty$
1(1) より, $\displaystyle\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y}=0$ であるから, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty$
ということで, 2(1) も発散する.

☆指数関数は整式より爆発的に大きくなる.
たとえ, x^{10000} であろうと, 1.0001^x に勝てないということ.

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log_{1.1}x}{x^{0.1}}$

分子の対数関数が弱いので, 分子 $<$ 分母 .
よって　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{\log_{1.1}x}{x^{0.1}}=0}$

★ $\boldsymbol{a>1}$, $\boldsymbol{n>0}$ のとき $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^n}=0}$
証明
$a^z=x^n$ とおくと, $x\to\infty$ のとき $z\to\infty$ かつ
$\log_a x=\dfrac{z}{n}$ であるから, 2(1) の★を用いて次のように証明できる.
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a x}{x^n}=\lim_{z\to\infty}\frac{\frac{z}{n}}{a^z}=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{z}{a^z}=0$$

☆対数関数は整式よりゆっくりと無限大に近く.
たとえ, $\log_{1.1}x$ であろうと, $x^{0.1}$ に勝てないということ.
ちなみに $\log_{1.1}x$ が 100 を超えるのは x が 10000 ちょっとあたり. $x^{0.1}$ が 100 を超えるのは x が 21 桁くらいになる.
とても逆転できそうにないが, x の桁が 30 桁になるまでには逆転する.