反射テスト　極限　指数・対数関数　02

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log x^2$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left\{\log(1+x)-\log x\right\}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 2 分 20 秒, A 級 4 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\log x^3 - \log x^4\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left\{\log(x-1) - \log x\right\}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

反射テスト　極限　指数・対数関数　02　解答解説

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 1 分, A 級 3 分, B 級 5 分, C 級 8 分 ）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log x^2$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\log x$$

$$= \infty$$

★ $x\to\infty$ ならば $\log x\to\infty$
基本的な関数の中で, 最もゆっくりと無限に近づく.

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}$$

$$= \lim_{x-1\to\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^x\right\}^{-1}$$

$$= \lim_{y\to\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y+1}\right\}^{-1}$$

$$= \lim_{y\to\infty} \left\{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\times\left(1+\frac{1}{y}\right)\right\}^{-1}$$

$$= (e\times 1)^{-1} = \boldsymbol{\frac{1}{e}}$$　← ★ 公式

★ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$

☆イメージ $\frac{1}{e} = 0.3678794\cdots$

$$\begin{cases} (1-0.1)^{10} & = 0.3486784\cdots \\ (1-0.01)^{100} & = 0.3660323\cdots \\ (1-0.001)^{1000} & = 0.3676954\cdots \end{cases}$$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\{\log(1+x)-\log x\}$

$$= \lim_{x\to\infty} x\log\frac{1+x}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \log e = \mathbf{1}$$　← ☆

★ ネイピア数 e の定義

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}$$

$$= -\left.(e^x)'\right|_{x=0}$$

$$= -e^0 = \mathbf{-1}$$

☆「極限 指数対数関数 No.01」の 1.(6) 参照

☆ $\displaystyle\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

$\dfrac{dy}{dx}$ に $x=a$ を代入した値を表す.

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 2 分 20 秒, A 級 4 分, B 級 7 分, C 級 10 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\log x^3-\log x^4\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\log\frac{x^3}{x^4}$$

$$=-\lim_{x\to\infty}\log x$$

$$=\boldsymbol{-\infty}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$

$$=\lim_{\frac{x}{2}\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2$$

$$=\left(\frac{1}{e}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{e^2}} \qquad \leftarrow\bigstar$$

$\bigstar$ $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}}$

1(2) の結果を用いた.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\{\log(x-1)-\log x\}$

$$=\lim_{x\to\infty}x\log\frac{x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$$

$$=\log\frac{1}{e}=\boldsymbol{-1} \qquad \leftarrow\bigstar$$

$\bigstar$ $\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\frac{1}{e}}$

1(2) の結果を用いた.

☆別解

$$\begin{aligned}
\text{与式}&=\lim_{x\to\infty}x\log\left(\frac{x}{x-1}\right)^{-1}\\
&=\lim_{x\to\infty}x\log\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{-1}\\
&=\lim_{x-1\to\infty}\log\left\{\left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x-1}\right)\right\}^{-1}\\
&==-\log(e\cdot 1)=-1
\end{aligned}$$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

$$=\lim_{\frac{1}{x}\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\boldsymbol{1}$$