

反射テスト 極限 指数・対数関数 02

1. 次の極限值を求めよ。(S級1分, A級3分, B級5分, C級8分)

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log x^2$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \{\log(1+x) - \log x\}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x}$

2. 次の極限值を求めよ。(S級2分20秒, A級4分, B級7分, C級10分)

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x^3 - \log x^4)$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \{\log(x-1) - \log x\}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

反射テスト 極限 指数・対数関数 02 解答解説

1. 次の極限值を求めよ。(S級1分, A級3分, B級5分, C級8分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \log x^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \log x$$

$$= \infty \quad \dots \text{答え}$$

★ $x \rightarrow \infty$ ならば $\log x \rightarrow \infty$

基本的な関数の中で、最もゆっくりと無限に近づく。

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-x}$$

$$= \lim_{x-1 \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^x \right\}^{-1}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1} \right\}^{-1}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \times \left(1 + \frac{1}{y}\right) \right\}^{-1}$$

$$= (e \times 1)^{-1} = \frac{1}{e} \quad \dots \text{答え} \quad \leftarrow \star \text{公式}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

$$\star \text{イメージ } \frac{1}{e} = 0.3678794\dots$$

$$\begin{cases} (1 - 0.1)^{10} & = 0.3486784\dots \\ (1 - 0.01)^{100} & = 0.3660323\dots \\ (1 - 0.001)^{1000} & = 0.3676954\dots \end{cases}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x \{\log(1+x) - \log x\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{1+x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \log e = 1 \quad \dots \text{答え} \quad \leftarrow \star$$

★ ネイピア数 e の定義

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0}$$

$$= - (e^x)' \Big|_{x=0}$$

$$= -e^0 = -1 \quad \dots \text{答え}$$

☆ 「極限 指数対数関数 No.01」の1.(6)参照

$$\star \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a}$$

$\frac{dy}{dx}$ に $x = a$ を代入した値を表す。

2. 次の極限值を求めよ。(S級2分20秒, A級4分, B級7分, C級10分)

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\log x^3 - \log x^4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{x^3}{x^4}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \infty} \log x$$

$$= -\infty \quad \cdots \text{答え}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

$$= \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}} \right\}^2$$

$$= \left(\frac{1}{e}\right)^2 = \frac{1}{e^2} \quad \cdots \text{答え} \quad \leftarrow \star$$

$$\star \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

1(2)の結果を用いた.

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \{\log(x-1) - \log x\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \frac{x-1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

$$= \log \frac{1}{e} = -1 \quad \cdots \text{答え} \quad \leftarrow \star$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$$

$$= \lim_{\frac{1}{x} \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$$

$$= 1 \quad \cdots \text{答え}$$

$$\star \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$$

1(2)の結果を用いた.

☆別解

$$\text{与式} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(\frac{x}{x-1}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{-1}$$

$$= \lim_{x-1 \rightarrow \infty} \log \left\{ \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \right\}^{-1}$$

$$= -\log(e \cdot 1) = -1$$