反射テスト　極限　指数・対数関数　01

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 40 秒, A 級 1 分 30 秒, B 級 3 分, C 級 5 分 ）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} e^x$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log x$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

2. 次の極限値を求めよ.（S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \log x$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\log(1-x)}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{e^x-e}{x^2-1}$

反射テスト　極限　指数・対数関数　01　解答解説

1.　次の極限値を求めよ．（ S 級 40 秒，A 級 1 分 30 秒，B 級 3 分，C 級 5 分 ）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} e^x$

$= e^0 = \mathbf{1}$　**…答え**

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log x$

$= \infty$　**…答え**

★ $\boldsymbol{x \to \infty}$ ならば $\boldsymbol{\log x \to \infty}$
基本的な関数の中で，最もゆっくりと無限に近づく．

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

$= \boldsymbol{e}$　**…答え　←★ 公式**

★ 公式　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

★ ネイピア数 $\boldsymbol{e}$ の定義 であり，自然対数の底である．

☆イメージ $\left\{\begin{array}{lcl}(1+0.1)^{10} & = & 2.5937\cdots \\ (1+0.01)^{100} & = & 2.7048\cdots \\ (1+0.001)^{1000} & = & 2.7169\cdots\end{array}\right.$

★ 公式　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$

これも覚えておくべき．$x=-y$ とすれば，

公式左辺 $\displaystyle= \lim_{y\to\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}$

$\displaystyle= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$

$\displaystyle= \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e$

よって，次の 1(4) が成立する．

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$\displaystyle= \lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$

$= \boldsymbol{e}$　**…答え　←★ 公式**

★ 公式　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e}$

☆定義と比べると引数が逆数になっていることに注意．
☆ 0 に両方向から近づくイメージを忘れないこと．

1(3) より，$\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$

ここで，$\boldsymbol{t = \frac{1}{x}}$ とおけば，
$t \to \pm\infty$　⇔　$x \to \pm 0$　⇔　$x \to 0$
すなわち 1(4) の式が e であることがわかる．

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(1+0)}{x-0}$

$\displaystyle= (\log(1+x))'\Big|_{x=0} = \frac{1}{1+0} = \mathbf{1}$　**…答え　←★ 公式**

☆ $\displaystyle\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$

$\displaystyle\frac{dy}{dx}$ に $x=a$ を代入した値を表す．

★ 公式　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1}$

☆別解
与式 $\displaystyle= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log(1+x) = \lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$
1(3) から，与式 $= \log e = \mathbf{1}$　**…答え**

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}$

$= (e^x)'\big|_{x=0} = e^0 = \mathbf{1}$　**…答え　←★ 公式**

★ 公式　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1}$

☆別解
$e^x = y$ とおくと，$x = \log y$
$x \to 0$ ならば $y \to 1$
与式 $\displaystyle= \lim_{y\to 1}\frac{y-1}{\log y} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\log(z+1)}$　←☆
1(5) から，与式 $= \mathbf{1}$　**…答え**
☆ $y = z+1$ とおけば，$y \to 1 \Rightarrow z \to 0$ ．

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 2 分 20 秒, A 級 3 分 30 秒, B 級 5 分, C 級 7 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}}$

$= e^0 = \mathbf{1}$ **…答え**

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \log x$

$= -\infty$ **…答え**

★対数関数 $y = \log x$ のグラフをイメージ

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{\left\{\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x\right\}^2}$$

$$= \lim_{2x\to\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x}}$$

$= \boldsymbol{\sqrt{e}}$ **…答え**

☆慣れが必要な計算である. 反復練習.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{3x\to 0} \left\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right\}^3$$

$= \boldsymbol{e^3}$ **…答え**

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{x}$

$$= -1 \cdot \lim_{-x\to 0} \frac{\log\{1+(-x)\}}{-x}$$

$= -1 \cdot 1 = \mathbf{-1}$ **…答え**

☆ 1(5) 参照.

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x^2 - 1}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= e \cdot \lim_{x\to 1} \left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1}\right)$$

$$= e \cdot \left(\lim_{x-1\to 0} \frac{e^{x-1}-1}{x-1}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}\right)$$

$= e \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{1+1} = \boldsymbol{\dfrac{e}{2}}$ **…答え**

☆ 1(6) 参照.