反射テスト　極限　三角関数　01

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分 50 秒, C 級 5 分 30 秒 ）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin x$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to \infty} \cos \frac{1}{x}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

(6)　$\displaystyle\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\tan\theta}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sin\dfrac{1}{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$

(6) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{(\theta-\pi)\tan\{2(\theta-\pi)\}}{1+\cos\theta}$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

反射テスト　極限　三角関数　01　解答解説

1.　次の極限値を求めよ.（ S 級 1 分 30 秒, A 級 2 分 30 秒, B 級 3 分 50 秒, C 級 5 分 30 秒 ）

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin x$

$= \sin 0$

$= \mathbf{0}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x}$

$= \cos 0 = \mathbf{1}$

☆ $x \to \infty$ ならば $\frac{1}{x} \to 0$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$= \mathbf{1}$　　← ★ 公式

☆証明　★はさみうちの原理を用いる.
$x = 0$ の近傍（十分近いの意）で, $|\sin x| \leqq |x| \leqq |\tan x|$
$Leftrightarrow$ $|\cos x| \leqq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqq 1$
$x \to 0$ のとき $\cos x \to 1$ より, $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \to 1$

$\therefore$　★ 公式　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$

$\displaystyle= 1\cdot\frac{1}{1}$

$= \mathbf{1}$　　← ★ 公式

★ 公式　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1}$

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cdot(1+\cos x)}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2\cdot(1+\cos x)}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}\right)$

$\displaystyle= 1\cdot 1\cdot\frac{1}{1+1} = \mathbf{\frac{1}{2}}$　　← ★ 公式

★ 公式　$\displaystyle\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}}$

分母が 2 次式であることに注意.

(6)　$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\tan\theta}$

$\displaystyle= \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{\theta-\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle= \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x}$　　← ☆

$\displaystyle= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\cos\frac{\pi}{2} - \sin x\sin\frac{\pi}{2}}{x}$

$\displaystyle= -\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \mathbf{-1}$

☆ 文字の置き換え
$\theta = x + \frac{\pi}{2}$ のとき,「 $\theta \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \to 0$ 」

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）

2. 次の極限値を求めよ.（ S 級 2 分 30 秒, A 級 4 分, B 級 6 分, C 級 9 分 ）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$

$= 0-\cos 0 = \mathbf{-1}$

☆ $x\to\infty$ ならば $\dfrac{1}{x}\to 0$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{x}$

$\displaystyle = \pi\lim_{\pi x\to 0}\frac{\sin\pi x}{\pi x}$

$= \pi\cdot 1 = \boldsymbol{\pi}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x\sin\frac{1}{x}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}$

$= \mathbf{1}$

☆ $x\to\infty$ ならば $\frac{1}{x}\to 0$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{180}\cdot x\right)}{x}$ ← ★

$\displaystyle = \frac{\pi}{180}\lim_{x\to 0}\frac{\tan\left(\frac{\pi}{180}\cdot x\right)}{\frac{\pi}{180}\cdot x}$

$\displaystyle = \frac{\pi}{180}\cdot 1 = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180}}$

☆単位に注意

★ 360 度法と弧度法（ラジアン）

180 度 $=$ π ラジアン t

1 度 $=$ $\frac{\pi}{180}$ ラジアン

$\frac{180}{\pi}$ 度 $=$ 1 ラジアン

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{x^3}$

$\displaystyle = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\right)$

$\displaystyle = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$

$= \mathbf{1}$

(6) $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{(\theta-\pi)\tan\{2(\theta-\pi)\}}{1+\cos\theta}$

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{x\tan 2x}{1+\cos(x+\pi)}$ ← ☆ 1

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{x\tan 2x}{1-\cos x}$ ←☆ 2

$\displaystyle = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{\tan 2x}{x}\right)$

$\displaystyle = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos x}\cdot\frac{\tan 2x}{2x}\right)$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{2}{1}\cdot 1 = \mathbf{4}$

☆ 1 文字の置き換え

$\theta = x+\pi$ のとき,「 $\theta\to\pi \Rightarrow x\to 0$ 」

☆ 2

$\cos(x+\pi) = \cos x\cos\pi - \sin x\sin\pi = -\cos x$

ⓒ 数学・算数を楽しむために（ http : //www.enjoymath.sakura.ne.jp/index.html ）