

# 反射テスト 極限 三角関数 01

1. 次の極限值を求めよ。(S級1分30秒, A級2分30秒, B級3分50秒, C級5分30秒)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x$

(2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(6)  $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \tan \theta}$

2. 次の極限值を求めよ。(S級2分30秒, A級4分, B級6分, C級9分)

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x}$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^\circ}{x}$$

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$$

$$(6) \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{(\theta - \pi) \tan \{2(\theta - \pi)\}}{1 + \cos \theta}$$

# 反射テスト 極限 三角関数 01 解答解説

1. 次の極限值を求めよ。(S級1分30秒, A級2分30秒, B級3分50秒, C級5分30秒)

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sin x$$

$$= \sin 0$$

$$= 0 \quad \dots \text{答え}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x}$$

$$= \cos 0 = 1 \quad \dots \text{答え}$$

$$\star x \rightarrow \infty \text{ ならば } \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$= 1 \quad \dots \text{答え} \quad \leftarrow \star \text{公式}$$

☆証明 ★はさみうちの原理を用いる.

$x = 0$  の近傍 (十分近いの意) で,  $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$

$$\Leftrightarrow |\cos x| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$$

$x \rightarrow 0$  のとき  $\cos x \rightarrow 1$  より,  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \rightarrow 1$

$$\therefore \star \text{公式} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{1}$$

$$= 1 \quad \dots \text{答え} \quad \leftarrow \star \text{公式}$$

$$\star \text{公式} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 \cdot (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cdot (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \quad \dots \text{答え} \quad \leftarrow \star \text{公式}$$

$$\star \text{公式} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

分母が2次式であることに注意.

$$(6) \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta}{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \tan \theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\theta - \frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{x} \quad \leftarrow \star$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2}}{x}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -1 \quad \dots \text{答え}$$

☆文字の置き換え

$\theta = x + \frac{\pi}{2}$  のとき, 「 $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \rightarrow 0$ 」

2. 次の極限值を求めよ。(S級2分30秒, A級4分, B級6分, C級9分)

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$= 0 - \cos 0 = -1 \quad \dots \text{答え}$$

$$\star x \rightarrow \infty \text{ ならば } \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{x}$$

$$= \pi \lim_{\pi x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

$$= \pi \cdot 1 = \pi \quad \dots \text{答え}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \sin \frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\sin \frac{1}{x}}$$

$$= 1 \quad \dots \text{答え}$$

$$\star x \rightarrow \infty \text{ ならば } \frac{1}{x} \rightarrow 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^\circ}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \left( \frac{\pi}{180} \cdot x \right)}{x} \quad \leftarrow \star$$

$$= \frac{\pi}{180} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \left( \frac{\pi}{180} \cdot x \right)}{\frac{\pi}{180} \cdot x}$$

$$= \frac{\pi}{180} \cdot 1 = \frac{\pi}{180} \quad \dots \text{答え}$$

☆単位に注意

★360度法と弧度法(ラジアン)

$$180 \text{ 度} = \pi \text{ ラジアン}$$

$$1 \text{ 度} = \frac{\pi}{180} \text{ ラジアン}$$

$$\frac{180}{\pi} \text{ 度} = 1 \text{ ラジアン}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{x^3}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 1 \quad \dots \text{答え}$$

$$(6) \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{(\theta - \pi) \tan \{2(\theta - \pi)\}}{1 + \cos \theta}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x}{1 + \cos(x + \pi)} \quad \leftarrow \star 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 2x}{1 - \cos x} \quad \leftarrow \star 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot \frac{\tan 2x}{x} \right)$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{1 - \cos x} \cdot \frac{\tan 2x}{2x} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot 1 = 4 \quad \dots \text{答え}$$

☆1文字の置き換え

$$\theta = x + \pi \text{ のとき, } \theta \rightarrow \pi \Rightarrow x \rightarrow 0$$

☆2

$$\cos(x + \pi) = \cos x \cos \pi - \sin x \sin \pi = -\cos x$$