# 反射テスト　極限　平方根の有理化　01

**1.**　次の極限値を求めよ.（ $S$ 級 1 分 15 秒, $A$ 級 2 分 20 秒, $B$ 級 3 分 40 秒, $C$ 級 5 分 ）

（1）　$\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

（2）　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left( \sqrt{x^2+2x} - x \right)$

**2.** 次の極限値を求めよ.（ $S$ 級 1 分 15 秒, $A$ 級 2 分 20 秒, $B$ 級 3 分 40 秒, $C$ 級 5 分 ）

（1） $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

（2） $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left( \sqrt{x^2 - 3x + 4} - x \right)$

# 反射テスト　極限　平方根の有理化　01　解答解説

**1.**　次の極限値を求めよ.（ $S$ 級 1 分 15 秒, $A$ 級 2 分 20 秒, $B$ 級 3 分 40 秒, $C$ 級 5 分 ）

**★ 極限の計算方針**

代入と概算を考えてから, 式の変形をする.

・代入…引数を代入して次の形になるものは式の変形が必要である.

**不定形**　$\dfrac{0}{0}$ , $\dfrac{\infty}{\infty}$ , $\infty-\infty$ , $0^0$ など.

・概算…概算には経験が必要だが, 慣れると答えの導き方を考える材料になる.

・式の変形

① $x\to\infty$　の場合　$\frac{1}{x}$ の形を作る

② $x\to a$ (定数)　の場合　分母が 0 にならない式を作る.

例えば, 因数分解して $(x-a)$ で約分したり, 平方根を有理化する.

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

★引数（ ここでは $x=1$ ）を代入して,　$\dfrac{0}{0}$

$$\text{与式} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

← 平方根があるので, 有理化すれば分母が 0 にならない.

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to1}(\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 \ = \ \mathbf{2}$$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$

★引数（ ここでは $x=\infty$ ）を代入して,　$\infty-\infty$

$$\text{与式} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-x)(\sqrt{x^2+2x}+x)}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

← 平方根があるので, 有理化する.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x}+x}$$

$$= \ = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}}+\frac{x}{x}}$$

← $\infty$ の代入なので, $\frac{1}{x}$ を作る.

$$= \ = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+1} \ = \ \mathbf{1}$$

**2.** 次の極限値を求めよ．( $S$ 級 1 分 15 秒，$A$ 級 2 分 20 秒，$B$ 級 3 分 40 秒，$C$ 級 5 分 )

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

★引数 ( ここでは $x = 1$ ) を代入して，　$\dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$

$$\text{与式} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right) \cdot \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}{x \cdot \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

← 平方根があるので，有理化すれば分母が 0 にならない．

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x \cdot \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \mathbf{1}$$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \left( \sqrt{x^2 - 3x + 4} - x \right)$

★引数 ( ここでは $x = \infty$ ) を代入して，　$\infty - \infty$

$$\text{与式} = \lim_{x \to \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 4} - x)(\sqrt{x^2 - 3x + 4} + x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 4} + x}$$

← 平方根がある．有理化すれば分母が 0 にならない．

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 3x + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 4} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-3x + 4}{\sqrt{x^2 - 3x + 4} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{3x}{x} + \frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2}} + \frac{x}{x}}$$

← $\infty$ の代入なので，$\frac{1}{x}$ を作る．

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-3 + \frac{4}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}} + 1}$$

$$= \frac{-3 + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0} + 1} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$$