反射テスト　解析　平均値の定理　02

1.　証明せよ.（ S 級 10 分, A 級 13 分, B 級 17 分, C 級 20 分 ）

(1)　$x > 0$ のとき,　$\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \dfrac{1}{x}$

(2)　$0 < a < b$ のとき,　$a < \log \dfrac{e^b - e^a}{b-a} < b$

2. 証明せよ.（ S 級 10 分, A 級 13 分, B 級 17 分, C 級 20 分 ）

(1) $x > 0$ のとき, $\dfrac{x}{x+1} < \log(x+1) < x$

(2) $x > 0$ のとき, $0 < \dfrac{1}{x}\log\dfrac{e^x - 1}{x} < 1$

反射テスト　解析　平均値の定理　02　解答解説

1.　証明せよ.（ S 級 10 分, A 級 13 分, B 級 17 分, C 級 20 分 ）

★ 平均値の定理 (微分に関するラグランジュの平均値の定理)

$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ において連続かつ $a < x < b$ で微分可能であるとき,

$a < c < b$　かつ　$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$　を満たす c が存在する.

☆何を $f(x)$ とおくか, 何を a, b とするのかがとても重要であり, 経験とカンが必要になる.

☆実戦では「不等式の証明」,「微分の定義のような式」の 2 つのキーワードが出てきたら平均値の定理を使うと覚えておこう.

(1)　$x > 0$ のとき,　$\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \dfrac{1}{x}$

$f(t) = \log t$ とおくと, $x \leqq t \leqq x+1$ で連続, $x < t < x+1$ で微分可能であるから,

平均値の定理より,

$x < t < x+1$　かつ　$f'(c) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x}$　を満たす c が存在する.

$f'(t) = \dfrac{1}{t}$ であるから, $f'(c) = \dfrac{1}{c}$　　また,　$\dfrac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = \log(x+1) - \log x$

ゆえに,　$\dfrac{1}{c} = \log(x+1) - \log x$　…①

$0 < x < c < x+1$ より,　$\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{x}$　…②

よって①と②より,　$\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log x < \dfrac{1}{x}$

(2)　$0 < a < b$ のとき,　$a < \log \dfrac{e^b - e^a}{b - a} < b$

$f(t) = e^t$ とおくと, $a \leqq t \leqq b$ で連続, $a < t < b$ で微分可能であるから,

平均値の定理より,

$a < c < b$　かつ　$f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$　を満たす c が存在する.

$f'(t) = e^t$ であるから, $f'(c) = e^c$　　また,　$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{e^b - e^a}{b - a}$

ゆえに,　$e^c = \dfrac{e^b - e^a}{b - a}$　…①

$a < c < b$ より, $e^a < e^c < e^b$　…②

よって①と②より,　$e^a < \dfrac{e^b - e^a}{b - a} < e^b$

真数条件を満たすので, 自然対数をとって,　$\log e^a < \log \dfrac{e^b - e^a}{b - a} < \log e^b$　⇔　$a < \log \dfrac{e^b - e^a}{b - a} < b$

2. 証明せよ．(S 級 10 分, A 級 13 分, B 級 17 分, C 級 20 分)

(1) $x>0$ のとき， $\dfrac{x}{x+1}<\log(x+1)<x$

$f(t)=\log t$ とおくと， $1 \leqq t \leqq x+1$ で連続， $1<t<x+1$ で微分可能であるから，

平均値の定理より，

$1<t<x+1$ かつ $f'(c)=\dfrac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1}$ を満たす c が存在する．

$f'(t)=\dfrac{1}{t}$ であるから， $f'(c)=\dfrac{1}{c}$ また， $\dfrac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1}=\dfrac{\log(x+1)-\log 1}{x}=\dfrac{\log(x+1)}{x}$

ゆえに， $\dfrac{1}{c}=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ …①

$0<1<c<x+1$ より， $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{1}{c}<1$ …②

よって①と②より， $\dfrac{1}{x+1}<\dfrac{\log(x+1)}{x}<1$

$x>0$ より，これを掛けて， $\dfrac{x}{x+1}<\log(x+1)<x$

(2) $x>0$ のとき， $0<\dfrac{1}{x}\log\dfrac{e^x-1}{x}<1$

$f(t)=e^t$ とおくと， $0 \leqq t \leqq x$ で連続， $0<t<x$ で微分可能であるから，

平均値の定理より，

$0<c<x$ かつ $f'(c)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ を満たす c が存在する．

$f'(t)=e^t$ であるから， $f'(c)=e^c$ また， $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{e^x-e^0}{x}=\dfrac{e^x-1}{x}$

ゆえに， $e^c=\dfrac{e^x-1}{x}$ …①

$0<c<x$ より， $e^0<e^c<e^x \iff 1<e^c<e^x$ …②

よって①と②より， $1<\dfrac{e^x-1}{x}<e^x$

真数条件を満たすので, 自然対数をとって， $\log 1<\log\dfrac{e^x-1}{x}<\log e^x \iff 0<\log\dfrac{e^x-1}{x}<x$

$x>0$ より， x で割って， $0<\dfrac{1}{x}\log\dfrac{e^x-1}{x}<1$