反射テスト　解析　平均値の定理　01

1.　証明せよ.（ S 級 10 分, A 級 13 分, B 級 16 分, C 級 20 分 ）

(1)　正の実数 a, b があって，$a < b$ を満たすとき,

$$\frac{b-a}{b} < \log\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

(2)　正の実数 a, b があって，$a < b$ を満たすとき,

$$e^a(b-a) < e^b - e^a < e^b(b-a)$$

2. 証明せよ.（ S 級 10 分, A 級 13 分, B 級 16 分, C 級 20 分 ）

(1) 正の実数 a, b があって, $a < b$ を満たすとき,

$$a < \frac{ab}{b-a} \log \frac{b}{a} < b$$

(2) $x > 0$ のとき, $x < e^x - 1 < xe^x$

反射テスト　解析　平均値の定理　01　解答解説

1.　証明せよ.（ S 級 10 分, A 級 13 分, B 級 16 分, C 級 20 分 ）

★ **平均値の定理**（微分に関するラグランジュの平均値の定理）

$f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ において連続かつ $a < x < b$ で微分可能であるとき,

$a < c < b$　かつ　$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$　を満たす c が存在する.

☆何を $f(x)$ とおくか, 何を a, b とするのかがとても重要であり, 経験とカンが必要になる.
☆実戦では「不等式の証明」,「微分の定義のような式」の 2 つのキーワードが出てきたら平均値の定理を使うと覚えておこう.

(1)　正の実数 a, b があって, $a < b$ を満たすとき,

$$\frac{b-a}{b} < \log\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

$f(x) = \log x$ とおくと, $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であるから,
平均値の定理より,

$a < c < b$　かつ　$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$　を満たす c が存在する.

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ であるから,　$f'(c) = \dfrac{1}{c}$

また,　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\log b - \log a}{b-a} = \dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}$

ゆえに,　$\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}$　…①

$0 < a < c < b$ より,　$\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$　…②

①と②より,　$\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a} < \dfrac{1}{a}$

$0 < a < b$ より, $b - a > 0$ であるから, これを掛けて,

$$\frac{b-a}{b} < \log\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}$$

(2)　正の実数 a, b があって, $a < b$ を満たすとき,

$$e^a(b-a) < e^b - e^a < e^b(b-a)$$

$f(x) = e^x$ とおくと, $a \leqq x \leqq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であるから,
平均値の定理より,

$a < c < b$　かつ　$f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$　を満たす c が存在する.

$f'(x) = e^x$ であるから,　$f'(c) = e^c$

また,　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{e^b - e^a}{b-a}$

ゆえに,　$e^c = \dfrac{e^b - e^a}{b-a}$　…①

$a < c < b$ より,　$e^a < e^c < e^b$　…②

①と②より,　$e^a < \dfrac{e^b - e^a}{b-a} < e^b$

$a < b$ より, $b - a > 0$ であるから, これを掛けて,

$$e^a(b-a) < e^b - e^a < e^b(b-a)$$

2. 証明せよ．(S 級 10 分，A 級 13 分，B 級 16 分，C 級 20 分)

(1) 正の実数 a, b があって，$a < b$ を満たすとき，

$$a < \frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a} < b$$

$f(x) = \log x$ とおくと，$a \leqq x \leqq b$ で連続，$a < x < b$ で微分可能であるから，
平均値の定理より，

$a < c < b$ かつ $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ を満たす c が存在する．

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$ であるから，$f'(c) = \dfrac{1}{c}$

また，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\log b - \log a}{b-a} = \dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}$

ゆえに，$\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a}$ $\cdots$①

$0 < a < c < b$ より，$\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{a}$ $\cdots$②

①と②より，$\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{b-a}\log\dfrac{b}{a} < \dfrac{1}{a}$

$0 < a < b$ より，$ab > 0$ であるから，これを掛けて，

$a < \dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a} < b$

(2) $x > 0$ のとき，$x < e^x - 1 < xe^x$

☆ $1 = e^0$ と考えれば，$e^x - 1 = e^x - e^0$ である．

$f(t) = e^t$ とおくと，$0 \leqq t \leqq x$ で連続，$0 < t < x$ で微分可能であるから，
平均値の定理より，

$0 < c < x$ かつ $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ を満たす c が存在する．

$f'(x) = e^x$ であるから，$f'(c) = e^c$

また，$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{e^x-1}{x}$

ゆえに，$e^c = \dfrac{e^x-1}{x}$ $\cdots$①

$0 < c < x$ より，$e^0 < e^c < e^x \Leftrightarrow 1 < e^c < e^x$ $\cdots$②

①と②より，$1 < \dfrac{e^x-1}{x} < e^x$

$0 < x$ より，$x < e^x - 1 < xe^x$